

TD 6. Singularités, résidus

Exercice 1. Déterminer les singularités des fonctions suivantes, leur nature et les résidus correspondants :

a) $\frac{\sin z}{z^3 - \pi^2 z}$, b) $\frac{z}{\sin z}$, c) $\exp\left(\frac{1}{z^4}\right)$, d) $z \cos \frac{1}{z}$, e) $\frac{1}{z(e^z - 1)}$,
f) $\cotan z - \frac{1}{z}$, g) $\frac{\exp(\frac{1}{z})}{z-1}$, h) $\pi \cotan(\pi z)$, i) $\frac{1}{\sin(z^2)}$.

Exercice 2. Soit U un ouvert connexe. Même question que ci-dessus avec :

- (1) $\frac{f'}{f}$, lorsque f est une fonction holomorphe sur U .
- (2) $\frac{g}{h}$, lorsque g et h sont deux fonctions holomorphes sur U et que h a un pôle simple.
- (3) $\frac{f(z)}{(z - z_0)^n}$, lorsque f est une fonction holomorphe sur U , $z_0 \in U$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Déterminer la série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ dans les couronnes suivantes:

- (1) $0 < |z| < 1$,
- (2) $1 < |z| < 2$.

Exercice 4. Calculer les résidus de

- (1) $\frac{e^z}{\sin^2 z}$ ($z = k\pi$),
- (2) $\frac{\cos z}{z^3 \sin z}$ ($z = 0$),

Exercice 5. Décomposer en série de Laurent dans les diverses couronnes admissibles de centre indiqué, les fonctions suivantes:

- (1) $\frac{z - \sin z}{z^3}$ ($z = 0$),
- (2) $\frac{z}{(z-1)(z-2)}$ ($z = 1, z = 2$),
- (3) $\frac{z}{z^2 + 1}$ ($z = i$),
- (4) $\frac{e^z}{(z-1)^3}$ ($z = 1$),
- (5) $\frac{1}{z+a}$, ($z = 0$)
- (6) $\frac{2z}{z^2 + 2z + 1}$ ($z = 0$).

Exercice 6. Trouver le résidu de $f \circ \varphi$ au point 0, si φ est holomorphe au voisinage de 0, avec $\varphi'(0) \neq 0$ et si f a un pôle simple au point $\varphi(0)$ avec le résidu R .

Exercice 7. Soit γ le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Calculer :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz.$$

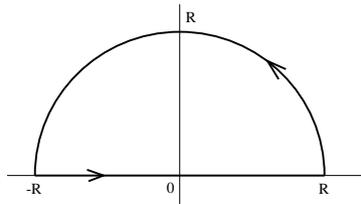
Exercice 8. On note γ le cercle de centre 0 et de rayon $3/2$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique, calculer :

$$\int_{\gamma} \frac{5z^2 + 1}{z(z-1)} dz \quad \text{et} \quad \int_{\gamma} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)} dz.$$

Exercice 9. Pour $r \neq 1$, on note γ_r le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Calculer :

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{1/z}}{z-1} dz.$$

Exercice 10. Considérons le contour suivant ($R \in \mathbb{R}^{+*}$) :



a) On fixe $a \in \mathbb{R}^+$. Calculer l'intégrale de

$$z \mapsto \frac{e^{iaz}}{1+z^2}$$

sur ce circuit. En faisant tendre R vers $+\infty$, déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx.$$

b) En intégrant $ze^{iz}/(1+z^2)$ sur le même contour, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx.$$

Exercice 11 (*). Soit φ une application holomorphe du disque pointé $0 < |z| < 1$ dans la couronne $1 < |z| < 2$.

- (1) Démontrer que φ se prolonge en une application holomorphe du disque $|z| < 1$ dans \mathbb{C} .
- (2) Démontrer que φ ne peut être un isomorphisme du disque pointé $0 < |z| < 1$ sur la couronne $1 < |z| < 2$.

Exercice 12 (*). Montrer que si φ est une fonction holomorphe près de a et $\varphi(a) \neq 0$, alors pour connaître les p premiers termes du développement en série en a de $\frac{1}{\varphi}$ il suffit de connaître les p premiers termes du développement en série en a de φ .