AUTOUR DE *"ON SOME APPLICATIONS OF THE WEIL REPRESENTATION"*

1. Introduction

Le but de ces notes est de donner quelques idées sur la preuve du résultat suivant [5, Theorem 1].

Théorème 1 (Kazhdan 1977)**.** *Pour tout $n \geq 2$ il existe des réseaux de congruence cocompacts $\Gamma \subset \mathrm{SU}(n,1)$ tels que $H^1(\Gamma) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$.*

Une conséquence de ce résultat est l'existence de réseaux arithétiques dans $\mathrm{SU}(n,1)$ qui ont des sous-groupes d'indice fini qui ne sont pas de congruence ; i.e. le problème des sous-groupes de congruence a une réponse négative pour ces réseaux. A noter que ce sont les seuls pour lesquels on connaisse la réponse [7, Theorem 7.2].

Ce résultat a été généralisé aux autres groupes unitaires par Borel et Wallach [4, Chapitre VIII] et à tous les espaces symétriques hermitiens par G. Anderson [1], qui obtient des résultats optimaux (les nombres de Betti peuvent être non-nuls pour tous les degrés où cela est possible).

La première partie rappelle les définitions de groupes de congruence et le formule de Matsushima, ainsi que la construction de réseaux arithmétiques dans les groupes unitaires. La seconde décrit la preuve de Kazhdan, qui consiste à étudier les représentations automorphes des groupes unitaires obtenues en restreignant la représentation de Shale-Weil du groupe symplectique ; on admettra un résultat dont la preuve utilise de l'analyse classique (le calcul des poids de la représentation) et on suivra les calculs faits dans [4] en les détaillant quelque peu.

2. Groupes de congruence et formule de Matsushima

2.1. **Groupes de congruence I.** L'exemple prototypique d'un groupe de congruence est celui des sous-groupes $\Gamma(N)$ de $\Gamma = \mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ donnés par

$$\Gamma(N) = \{\gamma \in \Gamma, \gamma \in 1_m + NM_m(\mathbb{Z})\},$$

autrement dit ce sont les noyaux des morphismes $\Gamma \to \mathrm{SL}_m(\mathbb{Z}/N)$ donnés par la réduction modulo N. En général, si G est un groupe de Lie (réel) et $\Gamma \subset G$ est un sous-groupe discret on dit que Γ est un réseau arithmétique si c'est un réseau [1] et s'il existe une représentation fidèle de dimension finie (ρ, V) de G et un réseau $V_{\mathbb{Z}} \subset V$ tels que $\rho(\Gamma)$ préserve $V_{\mathbb{Z}}$. On dit alors qu'un sous-groupe $\Gamma' \subset \Gamma$ est un *sous-groupe de congruence* [2] *de* Γ s'il contient l'un des $\Gamma(N) = \rho^{-1}(\Lambda_N)$ où Λ_N est le noyau de la réduction modulo N $\mathrm{SL}(V_{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{SL}(V_{\mathbb{Z}}/NV_{\mathbb{Z}})$; en particulier ce sont des sous-groupes d'indice fini de Γ et on peut se poser le problème suivant : est-ce que tous les sous-groupes de Γ sont de congruence ? C'est le fameux *problème des sous-groupes de congruence* (CSP en abrégé). C'est une question difficile et encore

1. i.e. le quotient $\Gamma \backslash G$ est de volume fini pour une mesure G-invariante à droite.
2. Noter que Γ' n'est pas forcément un *groupe de congruence*, notion qui ne dépend que d'une structure rationnelle et non pas entière–voir 2.4 ci-dessous.

ouverte dans plusieurs cas. On dispose quand même de beaucoup d'éléments de réponse, par exemple (voir [2]).

Théorème 2 (Mennicke, Bass–Milnor–Serre 1967). *Si $m \geq 3$, tout sous-groupe de $\Gamma = \mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ contient l'un des $\Gamma(N)$, i.e. CSP a une réponse affirmative pour Γ.*

On a ainsi une bijection entre les sous-groupes d'indice fini de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ et les couples (N, H) où H est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z}/N)$ qui ne contienne aucune des images des $\Gamma(M)$ pour M divisant N ; on notera Γ_H le réseau associé à (N, H).

En revanche, il était connu de Klein que la réponse à CSP est négative pour $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Ceci suit par exemple du lemme suivant.

Lemme 3. *Si Γ est un réseau arithmétique d'un groupe de Lie semisimple et $H^1(\Gamma) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$, alors Γ n'a pas CSP.*

Un schéma de preuve est le suivant : par le lemme de Selberg on peut supposer Γ sans torsion ; d'autre part le fait que $H^1(\Gamma) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$ implique qu'il existe un morphisme non-trivial $\Gamma \to \mathbb{Z}$, et les revêtements cycliques de $\Gamma\backslash G/K$ associés ne sont pas de congruence dès que le degré est assez grand, pour des raisons géométriques.

Ce lemme s'applique en fait à de nombreux réseaux arithmétiques dans les groupes $\mathrm{SO}(n, 1)$ (Millson, [8]), et aux réseaux de $\mathrm{SU}(n, 1)$ mentionnés dans le théorème de Kazhdan. On a la conjecture suivante, posée par Serre :

Conjecture 4. *Si G est de rang réel 1 alors aucun sous-groupe arithmétique de G ne vérifie CSP.*

2.1.1. *Remarques.* 1. Pour $G = \mathrm{SO}(n, 1)$ et $G = \mathrm{SU}(2, 1)$ on sait qu'il existe des réseaux de G qui ne sont pas arithmétiques.

2. Pour les autres G simples de rang 1 ou si $\mathrm{rg}_{\mathbb{R}}\, G \geq 2$ tous les réseaux sont arithmétiques (Margulis, Corlette, Gromov–Schoen) et ont une première homologie finie (Kazhdan).

3. Serre conjecture aussi que si $\mathrm{rg}_{\mathbb{R}}(G) \geq 2$ alors tous les réseaux irréductibles de G satisfont une version affaiblie de CSP, ce qui a été démontré dans de nombreux cas.

2.2. **Réseaux arithmétiques des groupes unitaires.**

2.2.1. *Restriction des scalaires.* Soit k un corps, K/k une extension quadratique et $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$ l'élément non-trivial. Soit $n \geq 1$, $V = K^n$ et Q une forme hermitienne sur V, i.e. Q est une forme k-biliniéaire qui vérifie de plus

$$Q(v, v') = Q(v', v)^\sigma \text{ et } Q(av, v') = aQ(v, v') \text{ pour touts } v, v' \in V \text{ et } a \in K;$$

autrement dit, dans l'identification $V = K^n$, il existe une matrice $Q \in M_n(k)$ telle que pour x, y des vecteurs colonnes on ait $Q(x, y) = {}^t(y^\sigma)Qx$. On définit le groupe unitaire de Q par

$$\begin{aligned} U(Q; k) &= \{g \in \mathrm{GL}(V) \,:\, \forall v, v' \in V,\, Q(gv, gv') = Q(v, v')\} \\ &= \left\{g \in \mathrm{GL}_n(K) \,:\, {}^t(g^\sigma)Qg = Q\right\} \end{aligned}$$

et le groupe spécial unitaire $\mathrm{SU}(Q; k) = \mathrm{SL}_n(K) \cap U(Q)$. Ce sont les k-points de groupes algébriques définis sur k que l'on notera U, SU et U est le produit de SU avec le k-tore anisotrope défini par $\{a \in K,\, aa^\sigma = 1\}$.

On suppose maintenant que

- k est un corps de nombres totalement réel (i.e. k est une extension finie de $\mathbb{Q}$ telle que si $\sigma_i\, i = 1, \dots, r$ sont les plongements $k \to \mathbb{C}$ on ait $\sigma_i(k) \subset \mathbb{R}$ pour tout i) ;
- K est une extension quadratique imaginaire de k (i.e. $K \otimes_k \mathbb{R} \cong \mathbb{C}$).

Soit G la restriction de Weil de SU à $\mathbb{Q}$, i.e. le $\mathbb{Q}$-groupe dont les $\mathbb{Q}$-points sont $\mathrm{SU}(Q; k)$. Les points réels de G sont donnés par

$$G = \mathrm{G}(\mathbb{R}) = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{SU}(Q^{\sigma_i}; \mathbb{C}).$$

Par le théorème de Borel–Harish-Chandra le sous-groupe des points entiers

$$\Gamma = \mathrm{G}(\mathbb{Z}) = \mathrm{SU}(Q; k) \cap \mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_K)$$

est un réseau dans G, et il est clairement arithmétique.

2.2.2. *Réseaux de type simple.* On s'intéressera ici au cas où Q^{σ_i} est définie pour tous les i sauf un, où elle a signature $(n-1, 1)$; on supposera que $k \subset \mathbb{R}$ et que Q^σ est non-définie seulement pour $\sigma = \mathrm{Id}$. On a alors $G = \mathrm{SU}(n, 1) \times G'$ où G' est un groupe compact, de sorte que Γ se projette en un réseau de $\mathrm{SU}(n, 1)$; on dira alors que Γ est un réseau arithmétique *de type simple* dans $\mathrm{SU}(n, 1)$.

Le résultat démontré par D. Kazhdan s'énonce alors plus précisément.

Théorème 5. *Soit Γ un réseau arithmétique de type simple, cocompact, dans $\mathrm{SU}(n, 1)$. Il existe un sous-groupe de congruence $\Gamma' \subset \Gamma$ tel que $H^1(\Gamma') \otimes \mathbb{Q} \neq 0$.*

On remarque que si $r > 1$, $\mathrm{SU}(Q)$ est anisotrope en au moins une place infinie et il suit donc que G est anisotrope sur $\mathbb{Q}$, de sorte que Γ est cocompact.

2.2.3. *D'autres réseaux.* Il existe d'autres classes de commensurabilité de réseaux arithmétiques dans $\mathrm{SU}(n, 1)$; on va se limiter ici à les décrire pour $n = 2$. On part aussi d'une extension quadratique imaginaire K/k d'un corps k totalement réel, mais au lieu de considérer une forme hermitienne sur K^3 on se donne une algèbre centrale simple D/K de degré 3 (i.e. $D \otimes_K \mathbb{C}$ est isomorphe à $M_3(\mathbb{C})$), munie d'une involution σ qui soit k-linéaire, qui induise l'automorphisme de Galois non-trivial sur K et qui vérifie $\sigma(ab) = \sigma(b)\sigma(a)$ pour $a, b \in D$. On a alors un k-groupe algébrique U dont les k-points sont donnés par

$$\mathrm{U}(D, \sigma; k) = \{a \in D \,:\, \sigma(a)a = 1\}.$$

Si D est scindée sur K (isomorphe à $M_3(K)$) alors on a $\sigma(g) = Q^t\overline{g}Q^{-1}$ pour une matrice $Q \in \mathrm{GL}_3(K)$ qui doit être hermitienne, et on retouve les formes simples. Sinon, D est nécéssairement un corps gauche ; le groupe $\mathrm{U}(D, \sigma)$ est une k-forme de $\mathrm{U}(2, 1)$ et ses points entiers sont cocompacts dans les points réels. On a alors le résultat suivant [9, Theorem 15.3.1] qui contraste avec le théorème de Kazhdan.

Théorème 6 (Rogawski, 1989)**.** *Soient D, σ comme ci-dessus avec $k = \mathbb{Q}$ et soit* G *la $\mathbb{Q}$-forme de* $\mathrm{SU}(2, 1)$ *associée à (D, σ). On suppose que D est un corps, alors pour tout réseau de congruence de* $\mathrm{G}(\mathbb{Q})$ *on ait $H^1(\Gamma) \otimes \mathbb{Q} = 0$.*

2.2.4. *Cas non-compact.* Dans le cas non-compact des arguments topologiques simples permettent de montrer que tout réseau a un revêtement fini ayant un premier nombre de Betti positif. Les classes obtenues ainsi ne sont dependant jamais représentées par des 1-formes harmoniques de carré intgrables ; en revanche le théorème de Kazhdan donne de telles 1-formes.

2.3. **Formule de Matsushima.** On réfère à [4] où à [3, Chapitre 1] pour le contenu de cette section. On fixe un groupe de Lie semisimple G et un sous-groupe compact maximal $K \subset G$ et un sous-groupe discret, sans torsion $\Gamma \subset G$; on note $X = G/K$ et $M = \Gamma\backslash X$ qui est donc une variété riemannienne. On note encore $\mathfrak{p}$ l'espace tangent à X au point $1_G K$, qui est donc une K-représentation unitaire ; on notera τ_p la représentation de K sur $\wedge^p\mathfrak{p}^*$. Enfin, $\Omega^p(Y)$ désigne l'espace des p-formes lisses (à coefficients complexes) sur une variété Y.

Le fibré tangent de G est trivial et on a donc une identification naturelle

$$\Omega^p(G) \leftrightarrow \mathrm{Hom}(\wedge^p\mathfrak{p}, C^\infty(G)),$$

donnée par $v \mapsto (g \mapsto g^* f(v))$; cette dernière est $K \times G$-équivariante (où K (reps. G) agit par translation à droite (resp. à gauche) sur les espaces de formes) et elle induit donc

$$\Omega^p(\Gamma\backslash X) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_K(\wedge^p\mathfrak{p}, C^\infty(\Gamma\backslash G)) = \left(C^\infty(\Gamma\backslash G) \otimes \wedge^p\mathfrak{p}^*\right)^K \tag{1}$$

où W^K désigne le sous-espace des vecteurs de W fixés par K.

L'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ peut être vue comme une algèbre d'opérateurs différentiels invariants sur G via la représentation R sur $C^\infty(G)$ dérivée de l'action de G par translations à droite. D'autre part l'espace symétrique X est naturellement muni de laplaciens Δ^p ; on a le résultat suivant [3, Lemme 1.1.1].

Lemme 7. *Il existe un élément C appartenant au centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ qui corresponde à Δ^p dans l'identification* (1).

On appelle usuellement C l'élément de Casimir de G.

On suppose maintenant que $\Gamma\backslash G$ est compact ; le théorème de Hodge–deRham affirme que l'on a

$$\dim H^p(M) \otimes \mathbb{Q} = \dim\ker\Delta^p = \dim\left(\ker R(C) \otimes \wedge^p\mathfrak{p}^*\right)^K.$$

On dira qu'une représentation irréductible π de G sur un espace H_π est cohomologique de degré p si elle vérifie que $\pi(C) = 0$ et que $(H_\pi \otimes \wedge^p\mathfrak{p}^*)^K \neq 0$ (ce dernier est alors forcément de dimension 1). D'autre part on note $m(\pi, \Gamma)$ le plus grand entier m tel qu'il existe un plongement G-équivariant $H_\pi^m \to L^2(\Gamma\backslash G)$; on sait alors que

$$L^2(\Gamma\backslash G) = \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} H_\pi^{m(\pi,\Gamma)}$$

(où $\widehat{G}$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations unitaires de G). De tout ceci on peut finalement déduire la formule de Matsushima pour les nombres de Betti de M :

$$\dim H^p(M) \otimes \mathbb{Q} = \sum_\pi m(\pi, \Gamma) \tag{2}$$

où la somme est prise sur les représentations cohomologiques de degré p de G.

2.4. **Groupes de congruence II.**

2.4.1. *Groupes adéliques.* Pour cette section on fixe un corps de nombres k, on notera $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de k. Si G est un groupe algébrique sur k alors le plongement diagonal de $\mathrm{G}(k)$ dans $\mathrm{G}(\mathbb{A})$ est un sous-groupe discret, et si de plus G est semisimple alors il est de covolume fini pour la mesure de Haar (ce dernier résultat est le célèbre "théorème de Borel–Harish-Chandra").

On note encore $\mathbb{A}_f$ l'anneau des adèles finis de F, le théorème d'approximation forte affirme alors que pour G simplement connexe (ce qui sera toujours le cas dans la suite) $\mathrm{G}(F)$ est dense dans $\mathrm{G}(\mathbb{A}_f)$.

On note G_∞ le produit des $\mathrm{G}(F_v)$ pour $v \in S_\infty$. Il suit de tout ce qui précède que si K_f est un sous-groupe compact-ouvert de $\mathrm{G}(\mathbb{A}_f)$ alors Γ_K est un réseau arithmétique de G_∞. Si G est un groupe de Lie, un réseau de congruence dans G est par définition un sous-groupe Γ tel qu'il existe G, K_f comme ci-dessus et un morphisme surjectif à noyau compact $\phi : G_\infty \to G$ tel que $\phi(\Gamma_K) = \Gamma$.

On fixe un sous-groupe compact maximal $K_\infty \subset G_\infty$, on note $X = G_\infty/K_\infty$. Si $\Gamma = \Gamma_K$ est un sous-groupe de congruence de G_∞ on obtient par le théorème d'approximation forte que

$$\Gamma\backslash X \cong \mathrm{G}(F)\backslash\mathrm{G}(\mathbb{A})/K \tag{3}$$

où $K = K_\infty K_f$.

2.4.2. *Exemple.* On suppose ici que $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_m$ et $F = \mathbb{Q}$. Si $N = p_1^{l_1} \dots p_n^{l_n}$ est un entier on a une application surjective

$$\psi : \prod_{i=1}^{n} \mathrm{SL}_m(\mathbb{Z}_{p_i}) \to \mathrm{SL}(\mathbb{Z}/N);$$

pour H un sous-groupe de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z}/N)$ on note $K_N(H)$ la préimage $\psi^{-1}(H)$; le sous-groupe

$$K_f(H) = K_N(H) \times \prod_{p \notin \{p_i\}} \mathrm{SL}_m(\mathbb{Z}_p)$$

est alors compact-ouvert dans $\mathrm{G}(\mathbb{A}_f)$, de sorte que $\Gamma_{K(H)}$ est un réseau de $G_\infty = \mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$; on a en fait $\Gamma_{K(H)} = \Gamma_H$.

2.4.3. *Cohomologie des groupes de congruence.* On note $C_c^\infty(\mathrm{G}(\mathbb{A}_f))$ l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur $\mathrm{G}(\mathbb{A}_f)$; c'est un sous-espace dense de $L^2(\mathrm{G}(\mathbb{A}_f))$. De même que dans le cas réel, si G est anisotrope on a une décomposition en somme discrète de l'espace $L^2(\mathrm{G}(k)\backslash\mathrm{G}(\mathbb{A}))$, que l'on notera

$$L^2(\mathrm{G}(k)\backslash\mathrm{G}(\mathbb{A})) = \bigoplus_{\pi \in \widehat{\mathrm{G}}(\mathbb{A})} H_\pi^{m(\pi)}.$$

D'après (3) et (2) ci-dessus on obtient le résultat suivant.

Corollaire 8. *Soit* G *un groupe algébrique comme ci-dessus,* K *un sous-groupe compact-ouvert de* $\mathrm{G}(\mathbb{A}_f)$*. On a*

$$\dim H^p(\Gamma_K\backslash X) \otimes \mathbb{Q} = \sum_{\substack{\pi \in \widehat{G}(\mathbb{A}) \\ \pi_\infty(C)=0}} m(\pi) \dim \mathrm{Hom}_{K_\infty}(\mathfrak{p}, H_{\pi_\infty}) \dim H_f^{K_f}.$$

En conséquence, si l'on veut montrer que $H^p(\Gamma_K)$ est infini il faut exhiber une représentation unitaire π de $\mathrm{G}(\mathbb{A})$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) Il existe des vecteurs fixes par $\pi_f(K_f)$;
(ii) On a $\mathrm{Hom}_{K_\infty}(\mathfrak{p}, H_{\pi_\infty}) \neq 0$;
(iii) On a $\pi_\infty(C) = 0$;
(iv) π se plonge dans $L^2(\mathrm{G}(F)\backslash\mathrm{G}(\mathbb{A}))$.

Comme π est continue, la condition (i) ci-dessus est automatiquement satisfaite pour un K_f assez petit ; pour démontrer le théorème de Kazhdan il suffit donc de montrer que pour toute $\mathbb{Q}$-forme G de type simple et anisotrope de $\mathrm{SU}(n,1)$ il existe une représentation de $\mathrm{G}(\mathbb{A})$ vérifiant (ii)-(iv).

3. Restriction de la représentation de Weil aux sous-groupes unitaires

3.1. **Représentation de Weil locale.** Soient F un corps local, $n \geq 1$ et V un F-espace vectoriel de dimension $2n$, et Ω une forme symplectique sur V. Le groupe de Heisenberg associé à (V, Ω) est défini par une extension centrale non-scindée

$$0 \to F \to N \to V \to 0;$$

plus précisément la loi de groupe sur $V \times F$ est donnée par

$$(v,t) \cdot (v',t') = (v + v', t + t' + \frac{1}{2}\Omega(v,v')).$$

Si $U \subset V$ est un sous-espace isotrope alors il se relève en le sous-groupe $\{(v,0),\ v \in U\}$ de N (que l'on notera abusivement U). Pour toute la suite on fixe deux sous-espaces isotropes maximaux V_1, V_2 de V tels que $V = V_1 \oplus V_2$, de sorte que $N = \langle V_1, V_2 \rangle$. On fixe aussi un caractère non-trivial $\chi : F \to \mathbb{C}^\times$; le sous-groupe abélien V_2F a alors une représentation abélienne donnée par le caractère $(v_2, t) \mapsto \chi(t)$ et on définit la représentation de Schrödinger ρ de N comme la représentation unitaire induite par cette dernière. Autrement dit, elle est définie sur l'espace $L^2(N/V_2F) = L^2(V_1)$ par les relations

$$\rho(v_1', 0) \cdot f(v_1) = f(v_1 + v_1') \text{ pour } v_1' \in V_1 \text{ ;}$$
$$\rho(v_2, 0) \cdot f(v_1) = \chi(\frac{1}{2}\Omega(v_1, v_2))f(v_1) \text{ pour } v_2 \in V_2.$$

D'autre part, le groupe $\mathrm{Sp}(F)$ agit par automorphismes sur N par $g \cdot (v,t) = (gv, t)$, et pour $g \in G$ on peut donc considérer la représentations unitaires $\rho \circ g$ sur $L^2(V_1)$. Il existe alors un groupe [3] $\mathrm{Mp}(F)$ qui est une extension de degré 2 de $\mathrm{Sp}(F)$ telle qu'il existe une représentation unitaire ω de $\mathrm{Mp}(F)$ sur $L^2(V_1)$ telle que pour touts $g \in \mathrm{Mp}(F), n \in N$ on ait

$$\omega(g)^{-1}\rho(n)\omega(g) = \rho(\overline{g}n). \tag{4}$$

(où $\overline{g}$ est l'image de g dans $\mathrm{Sp}(F)$).

3.2. **Construction d'une représentation automorphe.**

3. On utilisera abusivement des notations comme $\mathrm{Mp}(F)$ dans la suite mais ces groupes ne sont *pas* les points d'un groupe algébrique vu que Sp est simplement connexe.

3.2.1. *Représentation de Weil adélique.* On suppose maintenant que k est un corps de nombres et V, Ω est un k-espace symplectique ; V_1, V_2 sont deux sous-espace isotropes maximaux de V en somme directe. On définit alors des k-groupes N et Sp comme ci-dessus. Si $\mathbb{A}$ est l'anneau des adèles de k et χ un caractère $\mathbb{A} \to \mathbb{C}^\times$ trivial sur k, on peut construire une représentation ρ de $\mathrm{N}(\mathbb{A})$ sur $L^2(V_1 \otimes \mathbb{A})$, une extension de degré 2 $\mathrm{Mp}(\mathbb{A})$ de $\mathrm{Sp}(\mathbb{A})$ et une représentation unitaire de $\mathrm{Mp}(\mathbb{A})$ sur $L^2(V_1 \otimes \mathbb{A})$ qui vérifie la propriété d'entrelacement (4). On notera k_∞ le produit des complétés archimédiens de k ; les propriétés suivantes de ρ sont contenus dans le lemme 3 et la proposition 1 de Kazhdan (voir aussi [10, Théorème 6]).

Proposition 9. *Le groupe* $\mathrm{Sp}(k)$ *se relève à* $\mathrm{Mp}(\mathbb{A})$*, et il existe une forme linéaire continue* λ_0 *sur l'espace* $\mathcal{S}(V_1 \otimes \mathbb{A})$ *qui soit invariante sous* $\omega(\mathrm{Sp}(k))$*.*

De plus, si $H \subset \mathcal{S}(V_1 \otimes k_\infty)$ *est un sous-espace non-nul alors* λ_0 *est non-triviale sur* $H \otimes \mathcal{S}(V_1 \otimes \mathbb{A}_f)$*.*

3.2.2. *Construction de* λ_0*.* On définit la distribution λ_0 sur $\mathcal{S}(V_1 \otimes \mathbb{A})$ par

$$\lambda_0(f) = \sum_{v \in V_1} f(v).$$

On vérifie qu'elle est invariante par $\rho(\mathrm{N}(k))$: il est évident que pour $v_1 \in V_1$ on a

$$\lambda_0(\rho(v_1)f) = \sum_{v \in V_1} f(v + v_1) = \lambda_0(f).$$

Pour $v_2 \in V_2$ l'invariance par $\rho(v_2)$ suit de la trivialité de χ sur k : en effet on a $\Omega(v, v_2) \in k$ pour tout $v \in V_1$ et il vient

$$\lambda_0(\rho(v_2)f) = \sum_{v \in V_1} \chi(\Omega(v, v_2))f(v) = \sum_{v \in V_1} f(v) = \lambda_0(f).$$

En fait $\mathbb{C}\lambda_0$ contient toutes les distributions tempérées sur $V_1 \otimes \mathbb{A}$ invariantes par $\rho(\mathrm{N}(k))$: en effet, soit λ une telle distribution, l'invariance par $\rho(V_2)$ permet de montrer que

$$\lambda(f) = \sum_{v \in V_1} a_v f(v) \tag{5}$$

pour des $a_v \in \mathbb{C}$. L'invariance par V_1 permet alors de conclure que tous les a_v sont égaux.

La propriété (5) se démontre par des arguments standard : on montre que la distribution λ est supportée sur V_1, et il suit alors immédiatement qu'elle est de la forme indiquée.

On note $\mathrm{Mp}(k)$ la préimage de $\mathrm{Sp}(k)$ dans $\mathrm{Mp}(\mathbb{A})$; si λ est une distribution $\mathrm{N}(k)$-invariante alors il suit de (4) et du fait que $\mathrm{Sp}(k)$ normalise $\mathrm{N}(k)$ que pour tout $g \in \mathrm{Mp}(k)$ la distribution $\lambda \circ \omega(g)$ est encore $\mathrm{N}(k)$-invariante. Il suit encore que l'on a $\lambda_0 \circ \omega(g) = \xi(g)\lambda_0$ pour un morphisme $\xi : \mathrm{Mp}(k) \to \mathbb{C}^\times$; pour chaque $\overline{g} \in \mathrm{Sp}(k)$ il existe une seule préimage $g \in \mathrm{Mp}(k)$ telle que $\xi(g) = 1$ et il suit que $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Mp}(k)}\lambda_0 = \ker \xi$ est un relevé de $\mathrm{Sp}(k)$ à $\mathrm{Mp}(k)$.

3.2.3. *Non-trivialité de l'image.* On va démontrer que si $\psi \in \mathcal{S}(V_1 \otimes k_\infty)$ et $\lambda_0(\psi \otimes \phi) = 0$ pour toute $\phi \in \mathcal{S}(V_1 \otimes \mathbb{A}_f)$ alors $\psi = 0$, ce qui implique clairement la deuxième partie de la proposition 9.

Comme V_1 est dense dans $V_1 \otimes k_\infty$ il suffit de montrer que sous ces conditions $\psi(v) = 0$ pour tout $v \in V_1$. Comme λ_0 est $\rho(V_1)$-invariante on n'a besoin que de

$\psi(0) = 0$, et on peut se limiter à ψ à support compact. Soit U un voisinage de 0 contenant le support de ψ ; comme V_1 est discret dans $V_1 \otimes \mathbb{A}$ il existe un voisinage U_f de 0 dans $V_1 \otimes \mathbb{A}_f$ tel que $V_1 \cap UU_f = \{0\}$, et si ϕ est l'indicatrice de U_f on a alors

$$0 = \lambda_0(\psi \otimes \phi) = \psi(0).$$

3.2.4. *Restriction au sous-groupe unitaire.* On se donne maintenant une extension quadratique K/k, on suppose que $V = K^n$ et que Ω est la partie imaginaire [4] d'une forme hermitienne Q sur V. On a alors un plongement de k-groupes $\mathrm{U}(Q) \to \mathrm{Sp}(\Omega)$. De plus $\mathrm{SU}(\mathbb{A})$ se relève à $\mathrm{Mp}(\mathbb{A})$; on définit alors une application :

$$\Theta : \mathcal{S}(V_1 \otimes \mathbb{A}) \ni f \mapsto (g \mapsto \lambda_0(\omega(g)\cdot f)) \in C^\infty(\mathrm{SU}(k)\backslash \mathrm{SU}(\mathbb{A})). \tag{6}$$

Par la proposition 9, pour tout sous-espace $G_\infty = \mathrm{SU}(k_\infty)$-invariant $W \subset \mathcal{S}(V_1 \otimes k_\infty)$ l'image par Θ de $W \otimes \mathcal{S}(V_1 \otimes \mathbb{A}_f)$ est non-triviale, en particulier si la représentation de G_∞ est isomorphe à $\pi_0 \in \widehat{G}_\infty$ il existe une représentation automorphe π de $\mathrm{SU}(\mathbb{A})$ telle que $\pi_\infty = \pi_0$; il faut alors vérifier que l'on peut choisir W pour que π_∞ vérifie (ii) et (iii).

3.2.5. *Objectifs.* Il reste maintenant à appliquer la théorie locale aux places infinies de la représentation de Weil ; on veut montrer que

(a) Si Q est définie sur $\mathbb{R}$ alors la restriction de ω à $\mathrm{SU}(\mathbb{R})$ contient la représentation triviale ;

(b) Si Q est de signature $(n-1,1)$ sur $\mathbb{R}$ alors ω contient une sous-représentation π telle que
  - (b.ii) Si $K \subset \mathrm{SU}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal, la restriction de π à K contient une copie de la repésentation sur $\mathfrak{p}$;
  - (b.iii) On a $\pi(C) = 0$.

Tous ces résultats forment une partie de la proposition 2 de Kazhdan ; pour la preuve on décompose ω en utilisant l'action du centre $\mathrm{Z}_U(\mathbb{R})$ de $\mathrm{U}(\mathbb{R})$ puis on calcule explicitement les représentations des diverses algèbres de Lie.

3.3. Le cas où Q est définie positive.

On démontre ici le point (a) ci-dessus.

3.3.1. *Conventions.* On fixe

$$Q(z,z') = \sum_{i=1}^n z_i \overline{z}'_i,$$

on a alors

$$\Omega(x,x') = \sum_{i=1}^n (x_i x'_{n+i} - x_{n+i} x'_i).$$

Il vient

$$\mathrm{U}(Q) = \left\{ Z \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ {}^t\overline{Z}Z = 1_n \right\}\ ;$$

$$\mathrm{Sp}(\Omega) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix},\ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), {}^tB = B, {}^tC = C \right\}.$$

L'inclusion $\mathrm{U} \subset \mathrm{Sp}$ s'écrit

$$X + iY \mapsto \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}.$$

4. i.e. $\Omega = \frac{1}{2i}(Q - Q^\sigma)$ pour un $i \in K$ tel que $i\sigma(i) = 1$ et $i + \sigma(i) = 0$.

3.3.2. *Racines.* Soit $\mathfrak{h}$ définie par

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix} \,:\, D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix},\, d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan compacte pour $\mathfrak{sp}(n;\mathbb{R})$, et on a

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^0 \oplus \mathfrak{z}_\mathfrak{u}$$

où

$$\mathfrak{h}^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix} \,:\, \sum_j d_j = 0 \right\} \,;\, \mathfrak{z}_\mathfrak{u} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix} \,:\, \forall i, j\; d_i = d_j \right\}$$

sont respectivement une sous-algèbre de Cartan pour l'algèbre de Lie du sous-groupe $\mathrm{SU}(n) \subset \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ et le centre de celle de $\mathrm{U}(n)$. On note e_{ij} les matrices $n \times n$ telles que $(e_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ et on pose

$$h_j = \begin{pmatrix} 0 & -e_{jj} \\ e_{jj} & 0 \end{pmatrix}$$

et (ε_i) la base de $\mathfrak{h}^*$ donnée par

$$\varepsilon_i(h_j) = \delta_{ij}.$$

Les racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{sp}$ sont alors

$$\Phi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\, i \neq j\} \cup \{\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j),\, i \leq j\}$$

et on peut choisir comme racines positives le sous-ensemble

$$\Phi^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\, i < j\} \cup \{\varepsilon_i + \varepsilon_j,\, i \leq j\}.$$

Les racines de $\mathfrak{h}^0$ dans $\mathfrak{su}$ sont

$$\Psi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, i \neq j\}$$

et les racines positives sont $\Psi^+ = \Psi \cap \Phi^+$.

3.3.3. *Décomposition de ω.* On définit ω à partir des sous-espaces isotropes maximaux $V_1 = 0 \times \mathbb{R}^n$ et $V_2 = \mathbb{R}^n \times 0$. La théorie des fonctions de Hermite permet de démontrer le résultat suivant [4, Lemma 1.17].

Proposition 10. *Les poids de $\mathfrak{h}$ dans $\mathcal{S}(V_1)$ sont les*

$$\beta_{\underline{l}} = -\sum_{j=1}^{n} \left(l_j + \frac{1}{2}\right) \varepsilon_j,\; \underline{l} = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n.$$

L'espace propre $H_{\underline{l}}$ de $\beta_{\underline{l}}$ est de dimension 1 et la somme de ces espaces est dense dans $L^2(V_1)$.

Pour $l \in \mathbb{N}$ on pose

$$H_l = \bigoplus_{\underline{l}, \sum l_j = l} H_{\underline{l}}$$

de sorte que H_l est l'espace propre pour le caractère ξ_l de $\mathfrak{z}_\mathfrak{u}$ défini par

$$\begin{pmatrix} 0 & -z1_n \\ z1_n & 0 \end{pmatrix} \mapsto -\left(l + \frac{n}{2}\right) z.$$

Comme $\mathfrak{su}$ centralise $\mathfrak{z}_{\mathfrak{u}}$ ces sous-espaces sont stables par SU ; en particulier [5], pour $l = 0$ on voit que H_0 est de dimension 1 et il suit que l'action de SU sur icelui doit être triviale, ce qui démontre le point (a).

3.4. **Le cas où Q est de signature $(n, 1)$.** On vérifie maintenant le point (b).

3.4.1. *Conventions.* Ici on prend

$$Q(z, z') = \sum_{j=1}^{n-1} z_j \overline{z}'_j - z_n \overline{z}'_n = {}^t(\overline{z}')1_{n-1,1} z,\ 1_{n-1,1} = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Plutôt que d'utiliser la forme symplectique $(2i)^{-1}\,\mathrm{im}(Q)$ on va garder la forme Ω définie dans la section précédente et considérer le plongement $\iota : \mathrm{U}(Q) \to \mathrm{Sp}(\Omega)$ donné par

$$\iota(X + iY) = \begin{pmatrix} X & -Y 1_{n-1,1} \\ 1_{n-1,1} Y & 1_{n-1,1} X 1_{n-1,1} \end{pmatrix}.$$

3.4.2. *Racines.* Pour $\mathfrak{sp}$ on garde l'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ et le système de racines Φ définis à la section précédente ; pour $\mathfrak{su}$ on prend l'algèbre de Cartan

$$\mathfrak{h}^1 = \iota^* \mathfrak{h}^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix} : \sum_j d_j = 0 \right\}$$

et le système de racines $\iota^*\Phi$. On note (η_j) la base de $(\mathfrak{h}^1)^*$ duale à $\iota^*(h_j)$; La seule différence avec le cas où Q est définie vient du fait que l'on a $\iota^*(\varepsilon_n) = -\eta_n$.

On voit que $\mathfrak{h}^1$ est encore une sous-algèbre de Cartan compacte de $\mathfrak{su}$. L'algèbre compacte correspondante est isomorphe à $\mathfrak{u}(n-1)$.

3.4.3. *Décomposition de ω.* On peut toujours utiliser la proposition 10 pour décomposer $L^2(V_1)$ en sous-espaces SU-invariants : cette fois-ci on pose

$$H'_l = \bigoplus_{\underline{l},\, \sum_{j=1}^{n-1} l_j - l_n = l} H_{\underline{l}}.$$

Ces espaces sont de dimension infinie, cependant on peut démontrer le résultat suivant [4, Lemma 2.8] (que l'on n'utilisera pas dans la suite).

Proposition 11. *La représentation de* SU *sur H'_l est irréductible.*

On veut d'abord trouver un l tel que H'_l vérifie le point (b.ii). La représentation de $\mathfrak{u}(n-1)$ sur $\mathfrak{p}$ est isomorphe à la représentation τ sur $\mathbb{C}^{n-1}$ donnée par

$$Z \cdot z = Zz + (\mathrm{tr}\, Z) z.$$

En particulier, sur le centre $\mathfrak{z}_{\mathfrak{u}(n-1)}$ de $\mathfrak{u}(n-1)$ elle induit $\xi : z \mapsto nz$.

D'autre part, le caractère de $H_{\underline{l}}$ sur $\mathfrak{z}_{\mathfrak{u}(n-1)}$ est

$$\xi_{\underline{l}} : z \mapsto \left(n - 1 + \sum_{j=1}^{n} l_j \right) z$$

5. En fait, un calcul de poids montre que H_l est isomorphe à la représentation naturelle de SU sur $\mathrm{Sym}^l\, \mathbb{C}^n$.

et on a donc $\xi_{\underline{l}} = \xi$ seulement pour $\underline{l}$ ayant un seul l_j égal à 1 et les autres nuls. Les seuls H'_l qui contiennent de tels $H_{\underline{l}}$ sont H'_{-1} et H'_1, et le premier n'en contient qu'un, ce qui exclut qu'il contienne τ. Il faut donc vérifier que le sous-espace

$$V_1 = \bigoplus_{j=1,\dots,n-1} H_{\underline{l}^j},\ \underline{l}^j = (0,\dots,\underbrace{1}_{j^{\text{ème}}\text{ place}},\dots,0)$$

est isomorphe à τ ; comme l'action est holomorphe et $\mathfrak{su}(n-1)$ a au plus une représentation holomorphe non-triviale de dimension $\leq n-1$ il suffit de vérifier que $\mathfrak{su}(n-1)$ n'agit pas trivialement si $n > 2$, ce qui est évident au vu des poids.

3.4.4. *Caractère infinitésimal.* On note $\mathfrak{su} = \mathfrak{su}(Q)$ et soit $\mathcal{ZU}(\mathfrak{su})$ le centre de l'algèbre enveloppante. Il ne reste plus qu'à démontrer le résultat suivant, qui permet de vérifier (b.iii).

Lemme 12. *L'action de $\mathcal{ZU}(\mathfrak{su})$ sur H_1 est triviale.*

Soit χ_1 le caractère infinitésimal de H_1, i.e. χ est un morphisme d'anneaux commutatifs $\mathcal{ZU}(\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{C}$ tel que $\omega(B)f = \chi_1(B)f$ pour toute $f \in H_1$; on veut donc montrer que $\chi_1 = 0$. Pour $Z \in \mathcal{ZU}(\mathfrak{su}_{\mathbb{C}})$ on note $Z_{\mathfrak{h}^1}$ la projection de Z sur la sous-algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^1] \subset \mathcal{U}(\mathfrak{su}_{\mathbb{C}})$ (dans la base de $\mathcal{U}(\mathfrak{su})$ associée au système de racines positives $\Psi^+ = \iota^*\Phi^+$, voir [6, (8.22) et Lemma 8.17]). Le poids maximal de H_1 est associé au sous-espace $H_{\underline{l}_{n-1}}$ [4, Lemma 2.11] et est donc égal à

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n-1} \eta_j\right) - \eta_{n-1} + \frac{1}{2}\eta_n\ ;$$

comme $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \eta_j$ est nul sur $\mathfrak{su}$ il s'écrit plus simplement $\Lambda = -\eta_{n-1} + \eta_n$.

Soit f un générateur de H_1 ; on a $\omega(Z)f = \Lambda(Z_{\mathfrak{h}^1})f$ pour tout $Z \in \mathcal{ZU}(\mathfrak{su}_{\mathbb{C}})$, d'où il suit que $\Lambda(Z_{\mathfrak{h}^1}) = \chi_1(Z)$ et il suffit donc de montrer que

$$\Lambda(Z_{\mathfrak{h}^1}) = 0. \tag{7}$$

Soit

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Psi^+} \alpha = \sum_{i<j} (\eta_i - \eta_j)\ ;$$

on a

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (n - 2j + 1)\eta_j = \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)\eta_j.$$

La définition de l'isomorphisme d'Harish-Chandra [6, Theorem 8.18] implique que $w(\Lambda+\rho)(Z_{\mathfrak{h}^1}) = (\Lambda+\rho)(Z_{\mathfrak{h}^1})$ pour tout $w \in W$; en particulier si on trouve un w tel que $w(\Lambda+\rho) = \rho$ on peut en déduire (7). Comme $\mathfrak{su}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ on sait que W contient toutes les permutations sur les η_i ; d'autre part on a

$$\begin{aligned}\Lambda + \rho &= -\eta_{n-1} + \eta_n + \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)\eta_j \\ &= \sum_{j=1}^{n-2} (n-j)\eta_j + \eta_n \\ &= w\rho\end{aligned}$$

où w permute η_n avec η_{n-1}.

Références

[1] Greg W. Anderson. Theta functions and holomorphic differential forms on compact quotients of bounded symmetric domains. *Duke Math. J.*, 50(4) :1137–1170, 1983.

[2] H. Bass, J. Milnor, and J.-P. Serre. Solution of the congruence subgroup problem for SL_n ($n \geq 3$) and Sp_{2n} ($n \geq 2$). *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (33) :59–137, 1967.

[3] Nicolas Bergeron and Laurent Clozel. Spectre automorphe des variétés hyperboliques et applications topologiques. *Astérisque*, (303) :xx+218, 2005.

[4] A. Borel and N. Wallach. *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, volume 67 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2000.

[5] David Kazhdan. Some applications of the Weil representation. *J. Analyse Mat.*, 32 :235–248, 1977.

[6] Anthony W. Knapp. *Representation theory of semisimple groups*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. An overview based on examples, Reprint of the 1986 original.

[7] Alexander Lubotzky and Dan Segal. *Subgroup growth*, volume 212 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[8] John J. Millson. On the first Betti number of a constant negatively curved manifold. *Ann. of Math. (2)*, 104(2) :235–247, 1976.

[9] Jonathan D. Rogawski. *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, volume 123 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[10] André Weil. Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. *Acta Math.*, 111 :143–211, 1964.