4. Anneaux, polynômes (suite).

Exercice 4.1 1. Donner un exemple d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ admettant une racine $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

2. Soit $r \in \mathbb{Q}$ une racine rationnelle d'un polynôme unitaire $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $r \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4.2 Trouver un polynôme unitaire dans $\mathbb{Z}[X]$ qui admette $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ comme racine.

Exercice 4.3 1. Montrer que si $A \subset B$ sont des anneaux principaux, $a \in A$, $b \in B$ et d est un PGCD de a, b dans B alors il existe $d' \in A$ associé (dans B) à d qui est un PGCD de a, b dans A.

2. Soient m, n deux entiers. Montrer que le PGCD de m, n sur $\mathbb{Z}$ est aussi un PGCD de m, n sur $\mathbb{Z}[i]$. Que peut-on dire pour $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ pour $d \in \mathbb{Z}$ sans facteur carré ?

Exercice 4.4 1. Factoriser 30 en facteurs premiers dans $\mathbb{Z}[i]$.

2. Factoriser $30i$ en facteurs premiers dans $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 4.5 Trouver tous les couples $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2+1 = y^3$ (*indication : travailler dans* $\mathbb{Z}[i]$).

Exercice 4.6 Montrer que les deux anneaux suivants sont euclidiens :

1. $\mathbb{Z}[j]$ où $j = e^{2i\pi/3}$;
2. $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Exercice 4.7 On travaille dans l'anneau $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

1. Montrer que 2, 3, $1 \pm i\sqrt{5}$ sont irréductibles dans A.
2. Montrer que tout élément $a \in A$ admet une factorisation en irréductibles.
3. Trouver un élément $a \in A$ qui admet deux factorisations distinctes en irréductibles.
4. Bilan : A est-il intègre ? Est-il factoriel ?

Exercice 4.8 On note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps à p éléments, où p est un nombre premier.

1. Trouver tous les polynômes unitaires irréductibles de degré 3 dans $\mathbb{F}_2[X]$ et $\mathbb{F}_3[X]$.
2. Trouver tous les polynômes irréductibles unitaires de degré 2 dans $\mathbb{F}_5[X]$.
3. Montrer que $X^2 + 37X + 328$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 4.9 *1. Pour un polynôme $P(X)$ dans $\mathbb{F}_p[X]$ on note $I_P = (P(X))$ l'idéal de $\mathbb{F}_p[X]$ engendré par $P(X)$. Pour tout polynôme irréductible considéré ci-dessus, donner la caractéristique et la cardinalité de l'anneau $\mathbb{F}_p[X]/I_P$. Que peut-on dire de ces anneaux ?*

2. Soit p un nombre premier impair. Montrer que $\mathbb{F}_p[X]/(X^2+1)$ est un corps si $p \equiv 1 \pmod 4$ et isomorphe à $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ sinon.

3. Soit p un nombre premier impair. Montrer que $\mathbb{F}_p[X]/(X^2+X+1)$ est un corps si $p \equiv 2 \pmod 3$ et isomorphe à $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ sinon.

Exercice 4.10 Montrer que le polynôme $\det\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)$ est irréductible dans $K[x, y, z, w]$.

Exercice 4.11 Soit $P, Q \in K[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $P(X_1, \ldots, X_{i-1}, Q, X_{i+1}, \ldots, X_n) = 0$. Montrer que P est un multiple de $X_i - Q$.

Exercice 4.12 Montrer que l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré k dans $K[X_1, \ldots, X_n]$ est de dimension

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

En donner une base explicite dans le cas $k = 2$ et $n = 3$.

Exercice 4.13

1. Donner une factorisation de $X^2 + Y^2$ comme produit de deux polynômes homogènes de degré 1 dans $\mathbb{C}[X, Y]$.
2. Montrer que $X^2 + Y^2 + Z^2$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X, Y, Z]$.

Exercice 4.14 On travaille dans l'anneau $K[X_1, \ldots, X_n]$. Exprimer la somme de Newton s_4 en fonction des polynômes symétriques élémentaires $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$.