Vecteurs de Witt & δ-anneaux

$A/p \quad x \mapsto x^p$, on veut trouver un relèvement $\phi : A \to A$, $x \mapsto x^p + p$?

<u>Déf</u> : Un δ-anneau est un anneau A avec

$\delta : A \to A$ t.q : • $\delta(0) = \delta(1) = 0$

• $\delta(xy) = x^p \delta(y) + y^p \delta(x) + p\delta(x)\delta(y)$

• $\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) + \frac{1}{p}\left(x^p + y^p - (x+y)^p\right)$

$= \delta(x) + \delta(y) - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} x^i y^{p-i}$

Pour A δ-anneau, on définit $\phi : A \to A$; $\phi(x) = x^p + p\delta(x)$

<u>Prop</u> : ϕ est un endom d'anneaux

Si A sans p-torsion :

$\left\{\begin{array}{c}\delta\text{-structures} \\ \text{sur } A\end{array}\right\} \leftrightarrow \{\text{relèvt du Frob}\}$.

<u>Ex</u> : Sur $\mathbb{Z}$: $\delta(x) = \dfrac{x - x^p}{p}$

<u>Lem</u> : $\phi \circ \delta = \delta \circ \phi$, alors ϕ est un endo de $(A, \delta) \in$ Anns.

Afin d'étudier la catégorie Anns :

$W_2(A) = A \times A$ muni des deux lois

$$(x,y)+(z,w)=\left(x+z,\ y+w+\tfrac{1}{p}\left(x^p+z^p-(x+z)^p\right)\right)$$
$$(x,y)\cdot(z,w)=(xz,\ x^p w+z^p y+p\,yw)$$

$W_2(A)$ est un anneau. Pour A sans p-torsion :

$$\begin{tikzcd} W_2(A) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & A \arrow[d, "\varepsilon"] \\ A \arrow[r, "\varepsilon"] & A/p \arrow[r, "\mathrm{Frob}"] & A/p \end{tikzcd}$$

(avec p-torsion : même résultat dans le monde dérivé).

Par conséquent : $\rho : W_2(A)\to A\ ;\ (x,y)\longmapsto x$

$$\{\delta\text{-structure sur } A\} \simeq \{\varepsilon : A\to W_2(A) \text{ section de } \rho\}.$$

Prop : Ann_δ est complète, cocomplète est le foncteur oublié $U : \mathrm{Ann}_\delta\to\mathrm{Ann}$ respecte les limites et colimites.

Démo : $\varprojlim$ évident.

$\varinjlim$: $W_2 : \mathrm{Ann}\to\mathrm{Ann}$

Étant donné (A_i,δ_i), $A=\varinjlim A_i$

alors $\varinjlim W_2(A_i)\to W_2(\varinjlim A_i)=W_2(A)$

On a $\varphi_i : A_i\to W_2(A_i)$ qui induisent

$\varinjlim A_i = A \longrightarrow \varinjlim W_2(A_i)\longrightarrow W_2(A)$

Rmq : $\mathrm{Ann}_F = \{ (A, \phi) : \text{anneau} + \phi \text{ relevé du Frob} \}$

Alors $\mathrm{Ann}_F \xrightarrow{U} \mathrm{Ann}$ ne préserve pas toutes les colimites.

complète, cocomplète

Cor : Il existe $F, G : \mathrm{Ann} \to \mathrm{Ann}_\delta$

F adj à gauche de U

G adj à droite de U

$F : \mathrm{Ann} \longrightarrow \mathrm{Ann}_\delta$;

$\mathbb{Z}[x] \longmapsto \mathbb{Z}\{x\} = \mathbb{Z}[x_0, x_1, \dots]$, $\delta x_i = x_{i+1}$

$\mathbb{Z}[x^{(\alpha)}] \longmapsto \mathbb{Z}\{x^\alpha\} = \mathbb{Z}[x_0^{(\alpha)}, x_1^{(\alpha)}, \dots]$, $\delta x_i^{(\alpha)} = x_{i+1}^\alpha$.

1. A δ-anneau, $I \subset A$ t.q $\delta(I) \subset I$

Alors $\exists!$ δ-structure sur A/I t.q $A \to A/I$ morphisme de δ-anneaux.

2. A δ-anneau, S partie mult de A t.q $\phi(S) \subset S$

Alors $\exists!$ δ-structure sur $S^{-1}A$ t.q $(A \to S^{-1}A) \in \mathrm{Ann}_\delta$.

3. A δ-anneau, I idéal de type fini, $p \in I$

Alors $\exists!$ δ-structure sur $\hat{A}$ compatible avec celle de A.

4) A δ-anneau, $x \in A$

Alors $\exists$ $f: A \to B$ morphisme de δ-anneaux fidèlement plat t.q. $f(x) \in \phi(B)$

"ϕ est surjective localt pour la topologie fpqc".

<u>Définition</u> : L'adjoint à droite de $U: \mathrm{Ann}_\delta \to \mathrm{Ann}$ est noté W "vecteurs de Witt p-typiques".

$A \in \mathrm{Ann}$

$$\begin{aligned} UW(A) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(\mathbb{Z}[x], UW(A)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}_\delta}(\mathbb{Z}\{x\}, W(A)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(\mathbb{Z}[x_0, x_1, \dots], A) \\ &\cong A^{\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

via cet isomorphisme !

<u>Alors</u> : $(y_0, y_1, \dots, y_n, \dots) = (\underline{y}) \in W(A) \cong A^{\mathbb{N}}$

coordonnées de Joyal, $\delta(y_i) = y_{i+1}$

<u>Lem</u> Il existe des $(x_n) \in \mathbb{Z}\{y\} = \mathbb{Z}[y_0, y_1, \dots]$ t.q. :

- $x_n = y_n + (y_1, \dots, y_{n-1})\mathbb{Z}[y_0, \dots, y_n]$
- $x_0 = y_0$ et $x_1 = y_1$
- $\phi^n(x_0) = x_0^{p^n} + p x_1^{p^{n-1}} + \dots + p^n x_n$

Démo : par récurrence, en utilisant que

$$(a+pb)^p \equiv a^p \mod (bp^2)$$

$$\phi^n(x_0) = \phi(\phi^{n-1}(x_0))$$

$$= \phi(x_0)^{p^{n-1}} + p\,\phi(x_0)^{p^{n-2}} + \dots + p^{n-1}\phi(x_{n-1})$$

$$\phi(x_i) = (x_i^p + p\,*) \implies x_n = \delta(x_{n-1}) + p \dots$$

Alors on obtient les coordonnées de Witt $(\underline{x})$.

Coordonnées phantômes

$$w_n = \sum_{m=0}^{n} p^m x_m^{p^{n-m}} = \phi^n(x_0)$$

Alors $\phi^m(w_n) = w_{n+m}$.

$$\phi(x_n) = x_n^p \mod p$$

$UW \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathrm{Ann}}$

$UW(A) \longrightarrow A$ morphisme d'anneaux.

$(\underline{x}) \longmapsto x_0$

Relèvement multiplicative : $[\ ] : A \longrightarrow W(A) \overset{\text{coordonnées de Witt}}{\cong} A^{\mathbb{N}}$

$x \longmapsto (x, 0, 0, \dots)$

$w : W(A) \longrightarrow A^{\mathbb{N}}$

- injectif si A sans p-torsion
- surjectif si A est p-divisible.

Vu que $w_n = x_0 \circ \phi^n$, on trouve que w est un morphisme d'anneaux !

$V =$ décalage : $(x_0, x_1, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, \dots)$

$(w_0, w_1, \dots) \mapsto (0, pw_0, pw_1, \dots)$

$\phi \circ F =$ multiplication par p.

<u>Déf</u> : • Un δ-anneau A est parfait si ϕ isomorphisme.

• Un $\mathbb{F}_p$-algèbre est parfait si Frob iso.

<u>Lem</u> : A anneau parfait de car p

Alors $W(A)$ est sans p-torsion, p-adiquement complet et $W(A)/p \cong A$.

<u>Dém</u> : <u>ϕ est un isomorphisme</u>

ϕ injectif $\Rightarrow W(A)$ sans p-torsion

Alors $pW(A) =$ image de V

$= \mathrm{Ker}(W(A) \xrightarrow{x_0} W(A))$

$\Rightarrow W(A)/p = A$.

De façon similaire : $p^n W(A) =$ image de V^n

<u>Lem</u> : A parfait de car p.

S p-adiquement complet.

Alors tout morphisme $A \to S/p$ se relève

de manière unique $W(A) \to S$.

Dém : A parfait $\Rightarrow$ $\mathbb{L}_{A/\mathbb{F}_p} = 0$ $\Rightarrow$ relèvement.

car $\mathbb{L}_{A/\mathbb{F}_p} \xrightarrow{d\phi} \mathbb{L}_{A/\mathbb{F}_p}$

nulle + isomorphisme !

A anneau parfait $\Rightarrow$ $(x) = \sum_{n \geq 0} p^n [x_n] \in W(A)$

Théorème Les catégories suivantes sont équivalentes :

1. La catégorie des δ-anneaux parfaits p-adiquement complets
2. la catégorie des anneaux sans p-torsion, p-adiquement complets, A/p complet.
3. la catégorie des anneaux parfaits de car p.

1) $\to$ 2) oublie

2) $\to$ 3) $A \to A/p$

3) $\to$ 1) W.