Anneaux Groupoïdes - Victor Alfieri

Tuesday 7 November 2023 15:52

Anneaux Groupoïdes

But Qu'est-ce que c'est ? (descr. explicite)

Obs : On considère $\mathrm{Pol}_{\text{fin}} = \{ \mathbb{Z}[x_i, i \in I] \}$ fini / potentiellement ∞

On a les foncteurs

$$\mathrm{Ann} \longrightarrow \mathrm{Fun}_{\Pi}(\mathrm{Ring}^{op}, \mathrm{Set}) \longrightarrow \mathrm{Fun}_{\Pi}(\mathrm{Pol}^{op}, \mathrm{Set})$$

Π : commute aux produits infinis.

$$\downarrow$$

$$\left(\mathrm{Fun}_{\Pi}\left(\mathrm{Pol}^{op}_{\text{fin}}, \mathrm{Set}\right) \right)$$

c'est une équivalence aussi vers. Étant donné $F \in \mathrm{Fun}_{\Pi}(\mathrm{Pol}^{op}, \mathrm{Set})$

On lui associe $R = F(\mathbb{Z}[x])$

La structure d'anneau sur R est donnée par les flèches

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[x] &\longrightarrow \mathbb{Z}[x,y] \\ x &\longmapsto xy \\ y &\longmapsto x+y \end{aligned}$$

? plutôt

$$\mathrm{add}^*, \mathrm{mul}^* : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[x] \otimes \mathbb{Z}[x]$$

$$x \overset{\mathrm{add}^*}{\longmapsto} x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

$$x \overset{\mathrm{mul}^*}{\longmapsto} x \otimes x$$

Comme F commute aux Π, cela induit des flèches $R \times R \to R$.

Ceci motive :

Def Pour $\mathcal{C}$ une cat qui a des produits arbitraires on pose

$$\mathrm{Ann}(\mathcal{C}) = \mathrm{Fun}_{\Pi}(\mathrm{Pol}^{op}, \mathcal{C})$$

En particulier on a $\underline{\underline{\mathrm{Ann}(\mathrm{Grpd})}}$.

Plus gén, si $\mathcal{C}$ est une $(\infty,1)$-cat on peut voir $\mathrm{Ann}(\mathcal{C})$ comme une $(\infty,1)$-cat. En particulier

$\mathrm{Ann}(\mathrm{Grpd})$ forment une $(2,1)$-cat.

<u>Problème</u> : Il y a une ambiguïté sur le niveau 2 de cette structure.

On a un foncteur $\pi_0 : \mathrm{Grpd} \to \mathrm{Set}$ qui préserve les Π donc

$$\pi_0 : \mathrm{Ann}(\mathrm{Grpd}) = \mathrm{Fun}_{\Pi}(\mathrm{Pol}^{op}, \mathrm{Grpd}) \to \mathrm{Ann}(\mathrm{Set}) \cong \mathrm{Ann}$$

De même, on a $\mathrm{Set} \hookrightarrow \mathrm{Grpd}$ qui donne une inclusion

$$\mathrm{Ann} \to \mathrm{Ann}\,\mathrm{Grpd}.$$

<u>Prop</u> : Si on prend $\mathcal{R} \in \mathrm{AnnGrpd}$ et $R \in \mathrm{Pol}$

alors $\pi_0 \, \mathrm{Hom}(R, \mathcal{R}) = \mathrm{Hom}(R, \pi_0 \mathcal{R})$

<u>Preuve</u> : $\mathrm{Hom}(R, \mathcal{R}) = \mathcal{R}(R)$

donc $\pi_0(\text{—}) = \pi_0(\mathcal{R}(R)) = \mathrm{Hom}(R, \pi_0(\mathcal{R}))$ $\square$

Donc on a deux carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rings} \arrow[r] \arrow[d, hook, shift left] & \mathrm{Set} \arrow[d, hook, shift left] \\
\mathrm{Ann\,Grpd} \arrow[r] \arrow[u, "\pi_0", shift left] & \mathrm{Grpd} \arrow[u, "\pi_0", shift left]
\end{tikzcd}$$

Pour terminer on remarque qu'on a les produits fibrés dans AnnGrpd et que $\forall \; R_1, R_2 \in \mathrm{Ann}$ et $\forall \; \mathcal{R} \in \mathrm{Ann\;Grpd}$ avec

$$R_1 \longrightarrow \mathcal{R} \longleftarrow R_2$$

$$\begin{matrix} \wr \\ \wr \end{matrix}$$

$$R_1 \times_{\mathcal{R}} R_2 \in \mathrm{Ann}$$

<u>Déf</u> : Dans une cat $\mathcal{C}$ on peut regarder les gpdes internes

Déf : Dans une cat $\mathcal{C}$ on peut regarder les gpdes internes à $\mathcal{C}$:

$$C_0 \overset{s}{\underset{t}{\leftleftarrows}} C_1 \quad \cdots$$

composition

Ils forment une catégorie $\mathrm{Grpd}(\mathcal{C})$.

Prop : $\mathrm{Ann}(\mathrm{Grpd}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Grpd}(\mathrm{Ann})$

$$\begin{array}{ccc} F & \longmapsto & (\mathrm{Obj} \circ F \quad , \mathrm{Mor} \circ F , \ldots) \\ \cap & & \cap \\ \mathrm{Fun}_\pi(\mathrm{Pol}^{op}, \mathrm{Grpd}) & & \mathrm{Fun}_\pi(\mathrm{Pol}^{op}, \mathrm{Set}) \\ & & \| \\ & & \mathrm{Ann} \end{array}$$

$$\mathrm{Grpd} \underset{\mathrm{Obj}}{\overset{\mathrm{Mor}}{\rightrightarrows}} \mathrm{Set} \qquad s \Downarrow \quad \Uparrow \quad \Downarrow t$$

▫

• Quasi-idéaux. Un q. idéal est un triplet (C, I, d)

avec
- C anneau
- I un C-mod
- $d : I \to C$ C-lin t.q. $d(x)\, y = d(y)\, x$

On remarque qu'un q. idéal est exactement la donnée

d'un ... cd $^{[-1,0]}$

d'une cdga$^{[-1,0]}$

$$\begin{array}{cc} I & -1 \\ \downarrow d & \\ C & 0 \end{array}$$

Donc, par Dold-Kan on a une équivalence

$$\mathrm{Grpd}(\mathrm{Ann}) \cong \mathrm{cdga}^{[-1,0]}$$

mais on ne voit pas la partie 2-catégorique dans cette équiva !

Donc $\mathrm{AnnGrpd} \simeq \mathrm{cdga}^{[-1,0]}$

II Deux autres modèles de AnnGrpd

Cat	AnnGrpd	Grpd(Ann)	$\mathrm{cdga}^{[-1,0]}$
Weq	iden $\longrightarrow$	"foncteurs" qui induisent des éq. entre les groupoïdes sousjacents	q. iso

La structure 2-cat pourrait être donnée en localisant.

De plus, on peut décrire explicitement les foncteurs

$$\mathrm{cdga}^{[-1,0]} \longrightarrow \mathrm{Grpd}(\mathrm{Ann}) \quad \text{comme suit}$$

Étant donné $\begin{array}{c} I \\ \downarrow d \\ C \end{array} \in \mathrm{cdga}^{[-1,0]}$ On note $\mathrm{Cone}(I \xrightarrow{d} C)$

C

le groupoïde suivant :

- $\mathrm{Obj} = C$ anneau
- $\mathrm{Mor} = C \times I = \{ f_{c,x} \,,\ c \in C, x \in I \}$

où $f_{c,x} + f_{c',x'} = f_{c+c',\, x+x'}$

et $f_{c,x} \cdot f_{c',x'} = f_{xx',\, y}$, où $y = cx' + c'x + \underbrace{xdx'}_{= x'dx}$

__Rem__ : – $\mathrm{Cone}(I \to C)$ est le groupoïde quotient de C par l'action de I $\quad x \cdot c := x + dx$

– Pour $f : C \to C' \in \mathrm{cdga}^{[-1,0]}$ f est un q-i. ssi $\mathrm{Cone}(f)$ est une éq de groupoïdes.

III <u>Structure de 2-cat sur $\mathrm{cdga}^{[-1,0]}$</u>

Pour une cat $\mathcal{C}$ avec prod fibrés, on

Pour une cat $\mathcal{C}$ avec prod fibrés, on peut lui associer la 2-cat $\mathrm{Corr}(\mathcal{C})$:

correspondences

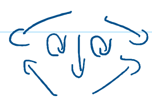
- $\mathrm{Obj} = \mathrm{obj}\, \mathcal{C}$

- $\mathrm{Mor} = \mathrm{Hom}(C_1, C_2) = \{ C_1 \xleftarrow{f} C_{12} \xrightarrow{g} C_2 \}$

- Composition

$$\begin{tikzcd} & & C_{13} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & C_{12} \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_{23} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ C_1 & & C_2 & & C_3 \end{tikzcd} = C_{23} \circ C_{12}$$

- 2-Mor =



• Sur $\mathrm{cdga}^{[-1,0]}$ on ne va pas regarder $\mathrm{corr}(\mathrm{cdga}^{[-1,0]})$ car c'est trop gros.

On va regarder des sous-classes de correspondences :

Dans $\mathrm{cdga}^{[-1,0]}$ on dit que $R_1 \xleftarrow{f} R_{12} \xrightarrow{g} R_2$ est :

- <u>Admissible</u> si f est un q.iso et que la flèche induite

$$R_{12}^{-1} \longrightarrow R_1^{-1} \times R_2^{-1} \quad \text{est un iso}$$

- Faiblement adm si f q.iso et surjectif

- Anamorphisme si f est un q.i surjectif.

On a inclusions

$$\mathrm{Corr}_{adm} \subset \mathrm{Corr}_{w.adm} \subset \mathrm{Corr}_{ana}$$

- Description équiv des corr admissibles :

C'est la cat des diagrammes

$$\begin{tikzcd} R_1^{-1} \arrow[d] \arrow[dr, "h_1"] & & R_2^{-1} \arrow[dl, "h_2"'] \arrow[d] \\ & R_{12}^0 \arrow[dl, "f_0"] \arrow[dr, "g_0"'] & \\ R_1^0 & & R_2^0 \end{tikzcd}$$

t.q. :

1) R_{12}^0 est un ann et f_0 et g_0 des mor d'anneaux

2) h_1, h_2 soient R_{12}^0 - linéaires pour les str induites via f_0, g_0

3) Il faut que $0 \to R_2^{-1} \xrightarrow{h_2} R_{12}^0 \xrightarrow{b_0} R_1^0 \to 0$

soit exacte.

On appelle cela un <u>butterfly</u>

– Lorsque R_1 est un anneau ($R_1^{-1}=0$) et $R_2 = \{I \xrightarrow{d} C\}$

on obtient

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[dr, "d"'] & \tilde{A} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] & 0 \\ & & C & & \end{tikzcd}$$

<u>Rq</u> Il y a une flèche canonique

$$\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Corr}(I \to C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, C/d(I))$$

qui est un iso lorsque $\mathrm{Ker}\, d = 0$.

L'inclusion $\mathrm{Corr}_{adm} \hookrightarrow \mathrm{Corr}_{ana}$ a un adjoint à

gauche $\mathrm{Adm} : \mathrm{Corr}_{ana} \longrightarrow \mathrm{Corr}_{adm}$ (on peut le rendre explicite)

Si $R_1 \xleftarrow{b} R_{12} \xrightarrow{f} R_2$ est faiblement admissible

Tu...

$$\Big\downarrow \mathrm{Adm}$$

$$R_1 \leftarrow R_{12}/I \longrightarrow R_2$$ où $I \subset R_{12}$ est

l'idéal engendré par $\ker\left(R_{12}^{-1} \longrightarrow R_1^{-1} \times R_2^{-1}\right)$

Au final, on peut considérer

la 2-cat $\mathrm{cdga}_{AN}^{[-1,0]}$ ← Aldrovandi-Noohi

Obj = $\mathrm{cdga}^{[-1,0]}$

Mor = $\mathrm{Corr}_{\mathrm{adm}}$

Comp = Adm (comp des ana)

et on a une éq de 2-cat $\mathrm{cdga}_{AN}^{[-1,0]} \simeq \mathrm{Ann}(\mathrm{Grpd})$