

- ① Pourquoi?
- ② Quoi?
- ③ Comment?

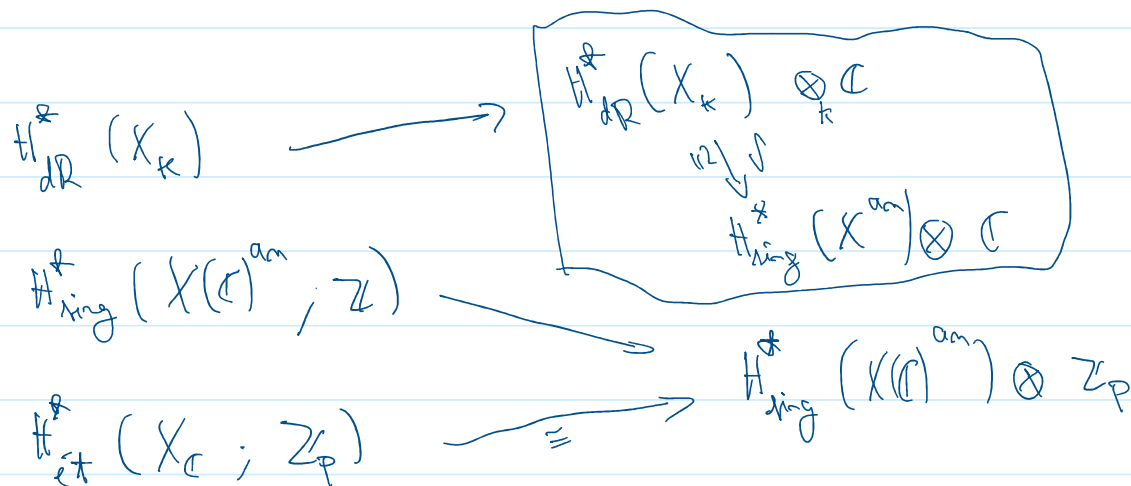
Motivation de la cohomologie prismatique:

Théorie de Hodge p-adique

Hodge classique

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

X_K propre et lisse



Structures supplémentaires sur la cohomologie

• H_{dR} Filtration de Hodge

$$F^i H_{dR} = R\Gamma(X, \Omega^{> i})$$

• (actions du groupe de Galois)

Variante p -adique

$$\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p \left[\frac{1}{p} \right] \subset k \subset \mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}_p}} \quad \text{complétion de } \overline{\mathbb{Q}_p}$$

$$\mathbb{Z}_p \subset \mathcal{O}_k \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \quad \text{anneaux des entiers}$$

Question: Pour X/\mathcal{O}_k propre, lisse, quel est le lien entre

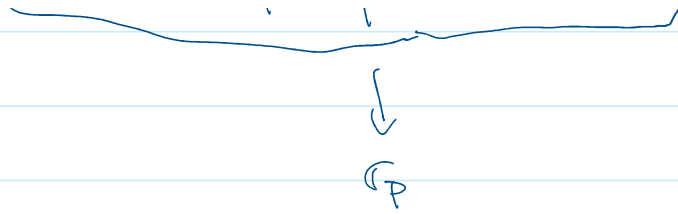
$$H_{dR}^*(X/\mathcal{O}_k) \text{ et } H_{\text{ét}}^*(X_{\mathbb{C}_p}; \mathbb{Z}_p)?$$

Thm: (Tsuji, Fontaine-Messing, Beilinson)

$X_{\mathbb{C}_p}$ propre, lisse

$$B_{dR} = \text{Frac} \left(\varprojlim^1_{dR} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} / \mathbb{Z}_p \right) \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Q}_p \right)$$

\leftarrow dérivé \cdot limite homotopique $\leftarrow \varprojlim$



Alors \exists iso de Bdr-algèbres

$$H_{dR}^i(X/\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR} \xrightarrow{\cong} H_{\text{ét}}^i(X_{\mathbb{C}_p}; \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{dR}$$

(Compatible avec filtrations de Hodge + Galois)

Q: Qu'est-ce qu'il se passe sans inverser \mathfrak{p} ?

Thm: (Blatt-Morita-Scholze)

Soit

$X/\mathbb{O}_{\mathbb{C}_p}$ propre et lisse et considérons l'anneau suivant

$$A_{\text{inf}}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}_p}) = W \left(\lim_{\varphi}^{\mathbb{C}_p^{\times}} \mathbb{O}_{\mathbb{C}_p}/\mathfrak{p} \right) \longrightarrow \mathbb{O}_{\mathbb{C}_p}$$

\cup
 (Σ)

Frobenius \circlearrowleft
 φ

Alors $\exists R\Gamma_{\Delta}(X_{\mathbb{O}_{\mathbb{C}_p}}/\mathbb{O}_{\mathbb{C}_p}) \in \text{Perf}(A_{\text{inf}}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}_p}))$

avec action



"Cohomologie prismatique relative à $\sigma_{\mathbb{C}_p}$ "

Ex. q.

$$(1) \mathbb{R}P_{\Delta}(X/\sigma_{\mathbb{C}_p}) \otimes_{A_{\text{inf}} \mathbb{C}_p} \sigma_{\mathbb{C}_p} \simeq \mathbb{R}P_{\Delta, \mathbb{R}}(X/\sigma_{\mathbb{C}_p})$$

$$(2) \left(\mathbb{R}P_{\Delta}(X/\sigma_{\mathbb{C}_p}) \left[\begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \right]_{\mathbb{F}_p}^1 \right)^{\psi=1} = \mathbb{R}P_{\text{ét}}(X_{\mathbb{C}_p}; \mathbb{Z}_p)$$

Objectif à long terme du GdT

Comprendre une construction de $\mathbb{R}P_{\Delta}(-)$ plus géométrique, avec moins d'analyse p -adique et de façon qui ressemble à la cohomologie de de Rham.

Cohomologie de de Rham sur \mathbb{Z}_p .

Exemple (trop simple):

$$X_{\mathbb{C}} = A^m = \text{Spec} \left(\overbrace{\mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_m]}^{\mathbb{R}} \right)$$

$$X_{z_p} = A_{z_p}^n = \text{Spec} \left(\overbrace{\mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n]} \right)$$

Structures sur $R\Gamma_{dR}(X_{z_p})$:

① $F_{\mathbb{H}}^i \Gamma_{dR}(X_{z_p}) = R\Gamma(\Omega^{z_i})$ Hodge

② $F^i \Gamma_{dR}(X_{z_p})$ filtration p-adique

③ Filtration de Hyman

$$\begin{array}{ccccccc}
 F_N^2 \Gamma_{dR} & & \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{d} & p\mathbb{Z}_p & \xrightarrow{d} & \mathbb{Z}_p^2 \rightarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 F_N^1 \Gamma_{dR} & & \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{d} & \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{d} & \mathbb{Z}_p \rightarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 F_N^0 \Gamma_{dR} & & \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{d} & \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{d} & \mathbb{Z}_p \xrightarrow{d}
 \end{array}$$

Module $F_N^i \Gamma_{dR}(X_{z_p}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p \cong F_{\mathbb{H}}^i \Gamma_{dR}(X_{\mathbb{F}_p})$

Gradé associé

$$gr_N^i \Gamma_{dR}(X_{z_p}) = \left[\mathbb{F}_p \xrightarrow{\circ} \mathbb{F}_p \xrightarrow{\circ} \dots \xrightarrow{\circ} \mathbb{F}_p \right]$$

$\Rightarrow gr_N^i \subset gr_N^{i+1}$ "inclusion naturelle"

$$\textcircled{4} \quad \tilde{\varphi} : \sum_{\mathbb{P}} [n_i] \rightarrow \sum_{\mathbb{P}} [n_i]$$

$$n_i \mapsto n_i^{\mathbb{P}} \quad \text{d'anneaux}$$

$$\rightsquigarrow \varphi : \Gamma_{\text{dR}}(X_{\mathbb{Z}_p}) \rightarrow \Gamma_{\text{dR}}(X_{\mathbb{Z}_p})$$

$$n_i \mapsto n_i^{\mathbb{P}}$$

$$dn_i \mapsto \varphi n^{\mathbb{P}-1} dn_i$$

Miracle cristallin;

$$R\Gamma_{\text{dR}}(X_{\mathbb{Z}_p}) \cong \Gamma_{\text{crist}}(X_{\mathbb{F}_p})$$

ne dépend que de $X_{\mathbb{F}_p}$ et $\varphi : R\Gamma_{\text{crist}}(X_{\mathbb{F}_p})$

ne dépend que du Frobenius

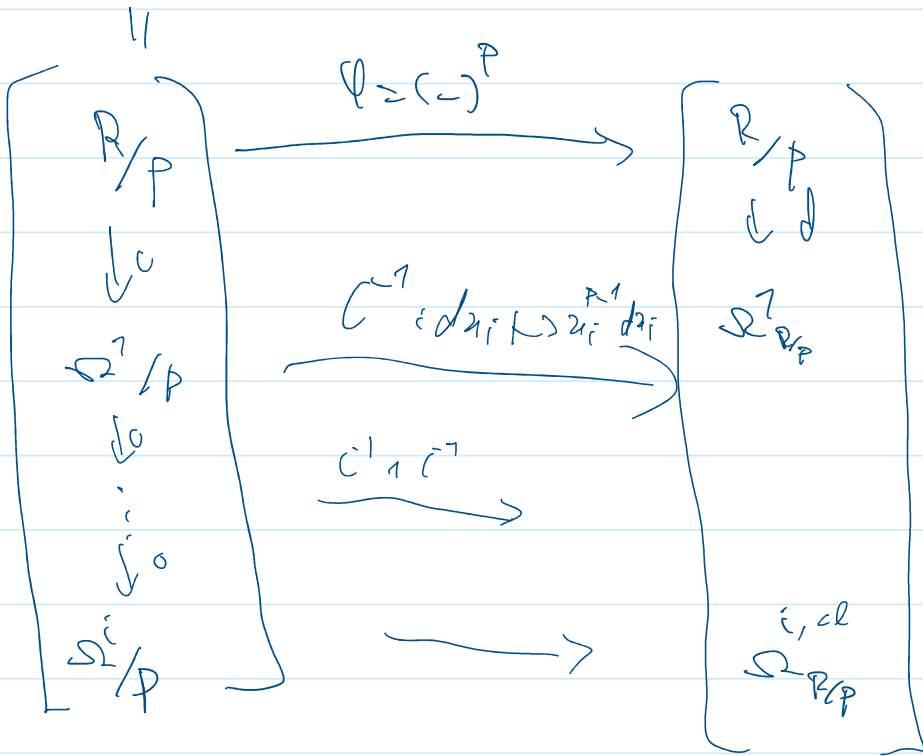
⑤ Compatibilité

$$\varphi : F_N^i \Gamma_{\text{dR}}(X_{\mathbb{Z}_p}) \longrightarrow \dot{P}^i \Gamma_{\text{dR}}(X_{\mathbb{Z}_p})$$

et au niveau du gradué associé

$$\text{gr}_N^i \Gamma_{\text{dR}}(X_{\mathbb{Z}_p}) \xrightarrow{\varphi} \Gamma_{\text{dR}}(X_{\mathbb{F}_p})$$

$$\mathrm{gr}_N^i \Gamma_{\mathrm{dR}}(X_{Z_p}) \xrightarrow{\varphi} \Gamma_{\mathrm{dR}}(X_{\mathbb{F}_p})$$



\rightarrow Filtration
 compatible

Cartier : quasi-iso