Intro - Joost

Tuesday 19 September 2023 15:41

1. Pourquoi?
2. Quoi?
3. Comment?

Motivation de la cohomologie prismatique:

Théorie de Hodge p-adique

Hodge classique

$\mathbb{Q} \subset k \subset \mathbb{C}$

X_k propre et lisse

$$H^*_{dR}(X_k) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} H^*_{dR}(X_k) \otimes_k \mathbb{C} \\ \wr\!\downarrow \\ H^*_{sing}(X^{an}) \otimes \mathbb{C} \end{array}}$$

$$H^*_{sing}(X(\mathbb{C})^{an}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*_{sing}(X(\mathbb{C})^{an}) \otimes \mathbb{Z}_p$$

$$H^*_{ét}(X_{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} H^*_{sing}(X(\mathbb{C})^{an}) \otimes \mathbb{Z}_p$$

Structures supplémentaires sur la cohomologie

• H_{dR} Filtration de Hodge

$$F^i H_{dR} = R\Gamma(X, \Omega^{\geq i})$$

• (actions du groupe de Galois)

<u>Variante p-adique</u>

$\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p[\frac{1}{p}] \subset K \subset \mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ complétion de $\overline{\mathbb{Q}}_p$

$\mathbb{Z}_p \subset \mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ anneaux des entiers

<u>Question</u> : Pour $X/_{\mathcal{O}_K}$ propre, lisse, quel est le lien entre

$$H^*_{dR}(X/_{\mathcal{O}_K}) \text{ et } H^*_{ét}(X_{\mathbb{C}_p}; \mathbb{Z}_p) \text{ ?}$$

<u>Thm</u> : (Faltings, Fontaine-Messing, Beilinson)

$X_{\mathbb{Q}_p}$ propre, lisse

dérivé. via limite homotopique $\lim\limits_{\leftarrow}$

$$B_{dR} = \mathrm{Frac}\left(\underbrace{\mathbb{L}\hat{\Gamma}_{dR}\left(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}/\mathbb{Z}_p\right) \text{"}\hat{\otimes}\text{"}\, \mathbb{Q}_p}\right)$$

$$\downarrow$$
$$\mathbb{C}_p$$

Alors $\exists$ iso de B_{dR}-algèbres

$$H^\bullet_{dR}(X/\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{dR} \xrightarrow{\sim} H^\bullet_{ét}(X_{\mathbb{C}_p}; \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{dR}$$

(Compatible avec filtration de Hodge + Galois)

Q: Qu'est-ce qu'il se passe sans inverser p?

Thm: (Bhatt - Morrow - Scholze)

Soit $X/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ propre et lisse et considérons l'anneau suivant

$$A_{inf}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}) = W\Big(\overbrace{\lim_{\varphi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p}^{\mathbb{C}_p^\flat}\Big) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$$

$\cup$ Frobenius $\circlearrowleft \varphi$

(ξ)

Alors $\exists$ $R\Gamma_\Delta(X_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}) \in \mathrm{Perf}(A_{inf}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}))$

avec action $\circlearrowleft_{\varphi}$ « cohomologie prismatique relative à $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ »

E.g.

(1) $R\Gamma_{\Delta}(X/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}) \otimes_{A_{inf},\varphi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \simeq R\Gamma_{dR}(X/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$

(2) $\left(R\Gamma_{\Delta}(X/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})\left[\frac{1}{\xi}\right]^{\wedge}_{p}\right)^{\varphi=1} = R\Gamma_{ét}(X_{\mathbb{C}_p}; \mathbb{Z}_p)$

Objectif à long terme du GdT

Comprendre une construction de $R\Gamma_{\Delta}(-)$ plus géométrique, avec moins d'analyse p-adique et de façon qui ressemble à la cohomologie de de Rham.

Cohomologie de de Rham sur $\mathbb{Z}_p$.

Exemple (trop simple) :

$X_{\mathbb{C}} = \mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(\underbrace{\mathbb{Z}_p[x_1,\dots,x_n]}_{R})$

$$X_{\mathbb{Z}_p} = \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}_p} = \mathrm{Spec}\left(\overbrace{\mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n]}\right)$$

Structures sur $R\Gamma_{dR}(X_{\mathbb{Z}_p})$:

(1) $F^i_H \Gamma_{dR}(X_{\mathbb{Z}_p}) = R\Gamma(\Omega^{\geq i})$ Hodge

(2) $p^\bullet \Gamma_{dR}(X_{\mathbb{Z}_p})$ filtration p-adique

(3) Filtration de Nygaard

$$\begin{tikzcd}
F^2_N \Gamma_{dR} & p^2 R \arrow[r, "d"] \arrow[d] & p\Omega^1_R \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \Omega^2_R \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
F^1_N \Gamma_{dR} \arrow[u, phantom, "\cap"] & pR \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \Omega^1_R \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \Omega^2_R \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
F^0_N \Gamma_{dR} \arrow[u, phantom, "\cap"] & R \arrow[r, "d"] & \Omega^1_R \arrow[r, "d"] & \Omega^2_R \arrow[r, "d"] & {}
\end{tikzcd}$$

<u>Modulo p</u> $\quad F^\bullet_N \Gamma_{dR}(X_{\mathbb{Z}_p}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p \cong F^\bullet_H \Gamma_{dR}(X_{\mathbb{F}_p})$

<u>Gradué associé</u>

$$gr^i_N \Gamma_{dR}(X_{\mathbb{Z}_p}) = \left[R/p \xrightarrow{0} \Omega^1_{R/p} \xrightarrow{0} \dots \longrightarrow \Omega^i_{R/p} \right]$$

$\Rightarrow gr^i_N \subseteq gr^{i+1}_N$ « inclusion naturelle »

④ $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}_p[x_i] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[x_i]$

$x_i \longmapsto x_i^p$ d'anneaux

$\rightsquigarrow \varphi : \Gamma_{dR}(X_{\mathbb{Z}_p}) \longrightarrow \Gamma_{dR}(X_{\mathbb{Z}_p})$

$x_i \longmapsto x_i^p$

$dx_i \longmapsto p\, x^{p-1}\, dx_i$

<u>Miracle cristallin</u> :

$R\Gamma_{dR}(X_{\mathbb{Z}_p}) \simeq \Gamma_{crist}(X_{\mathbb{F}_p})$

ne dépend que de $X_{\mathbb{F}_p}$ et $\varphi : R\Gamma_{crist}(X_{\mathbb{F}_p})$

ne dépend que du Frobenius

⑤ <u>Compatibilité</u>

$\varphi : F_N^i\, \Gamma_{dR}(X_{\mathbb{Z}_p}) \longrightarrow p^i\, \Gamma_{dR}(X_{\mathbb{Z}_p})$

et au niveau du gradué associé

$gr_N^i\, \Gamma_{dR}(X_{\mathbb{Z}_p}) \xrightarrow{\varphi} \Gamma_{dR}(X_{\mathbb{F}_p})$

$$gr^i_N \, \Gamma_{dR}(X_{\mathbb{Z}_p}) \xrightarrow{\ \varphi\ } \Gamma_{dR}(X_{\mathbb{F}_p})$$

$$\|$$

$$\left[\begin{array}{c} R/p \\ \downarrow 0 \\ \Omega^1/p \\ \downarrow 0 \\ \vdots \\ \downarrow 0 \\ \Omega^i/p \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi = (-)^p} \\ \\ \xrightarrow{C^{-1} : dx_i \mapsto x_i^{p-1} dx_i} \\ \xrightarrow{C^{-1} \wedge C^{-1}} \\ \\ \\ \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{c} R/p \\ \downarrow d \\ \Omega^1_{R/p} \\ \\ \vdots \\ \\ \Omega^{i,cl}_{R/p} \end{array}\right]$$

$\rightsquigarrow$ Filtration croissante

<u>Cartier</u> : quasi-iso