Université de Toulouse Paul Sabatier

Préparation à l'agrégation
Année 2023-2024

Cours d'algèbre bilinéaire

Joan Bellier-Millès

Introduction

Le but de l'algèbre bilinéaire est de donner un cadre conceptuel dont un exemple est la notion de produit scalaire. Étant donné deux vecteurs (unitaires) x et y, leur produit scalaire $\langle x, y\rangle$ est un nombre qui caractérise l'angle (non orienté) entre les deux vecteurs. Le produit scalaire permet aussi de définir la norme d'un vecteur x avec le calcul $\sqrt{\langle x, x\rangle}$, ainsi qu'une notion de distance en considérant la norme du vecteur associé à deux points.

La notion de forme bilinéaire (symétrique), $(x, y) \mapsto b(x, y)$, moins spécifique que la notion de produit scalaire ne permet pas, en général, de définir une norme ou une notion d'angle. Elle sert cependant à définir une relation d'*orthogonalité* et elle ouvre la voie pour des géométries différentes de la géométrie d'Euclide. L'exemple le plus saillant est celui de la géométrie de l'espace-temps en relativité générale. En dehors de la caractéristique 2, une forme bilinéaire symétrique est caractérisée par l'application $x \mapsto b(x, x)$ que l'on appelle forme quadratique et l'on peut être tenté de se limiter à l'étude des formes quadratiques. Il est cependant parfois plus facile d'étudier deux fois le degré 1 ("bi-linéaire"), plutôt qu'une fois le degré 2 (quadratique). On naviguera entre les deux notions sans préciser si le choix utilisé est nécessaire ou fortuit.

Une fois la notion d'espace quadratique posé, il convient de s'interroger sur les morphismes naturels dans ce contexte : ce sont les morphismes qui préservent les formes quadratiques en jeu (et nous nous intéresserons plus spécifiquement aux isomorphismes). Ces isomorphismes permettent de comparer les espaces quadratiques entre eux. Mais, en présence d'un seul espace quadratique, ces automorphismes, appelés *orthogonaux*, sont aussi les transformations de la géométrie euclidienne (rotations, réflexions, ...) : ils forment le groupe orthogonal. Préserver la forme quadratique implique de préserver l'orthogonalité et c'est une propriété que l'on souhaite voir vérifiée par les transformations du monde qui nous entoure (et qui ne déforme pas les objets).

Nous nous intéressons à deux cas qui se traitent de manière similaire et qui sont les plus classiques : le cas *euclidien* et le cas *hermitien*. Nous décomposons les éléments du groupe orthogonal de plusieurs manières de façon à bien les comprendre. Il découle de cette compréhension des applications inattendues pour l'étude des matrices. En effet, nous proposerons plusieurs décompositions matricielles qui admettent une interprétation géométrique : le théorème spectral (section 4.3.3), la décomposition polaire (section 5.2.1) et la décomposition en valeurs singulières (section 5.3).

Dans la première partie du cours (leçons 1 et 2), nous présentons et étudions les espaces quadratiques. Nous montrons qu'ils admettent toujours une base orthogonale (théorème 24) et qu'il est possible de la calculer effectivement (théorème 26). Nous les classifions dans les cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ (section 2.2).

Dans les leçons 3 et 4 de la deuxième partie, nous étudions le cas euclidien, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique définie positive (que l'on appelle aussi produit scalaire). Les automorphismes orthogonaux en dimension 2 sont les rotations et les réflexions. Les réflexions (en dimension quelconque) forment un ensemble de générateurs du groupe orthogonal (section 3.2). Nous utilisons les rotations (en dimension 2) pour définir une notion d'*angle* (section 3.3.2) et pour décrire la réduction des automorphismes orthogonaux en dimensions supérieures (section 4.2).

Pour terminer, nous traitons le cas hermitien dans la leçon 5. Nous présentons aussi les deux décompositions matricielles que sont la décomposition polaire et la décomposition en valeurs singulières (ces décompositions existent aussi dans le cas euclidien).

Table des matières

Le contenu de ce cours n'est pas original

La première partie du cours est extraite du livre de Clément de Seguins Pazzis, *Invitation aux formes quadratiques* [SP11], qui est une lecture que je vous conseille fortement.

Une autre lecture conseillée est le livre de Philippe Caldero et Jérôme Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries* [CG17]. Ce sont les chapitres V et VI qui concernent ce cours et quelques passages du cours en sont extraits.

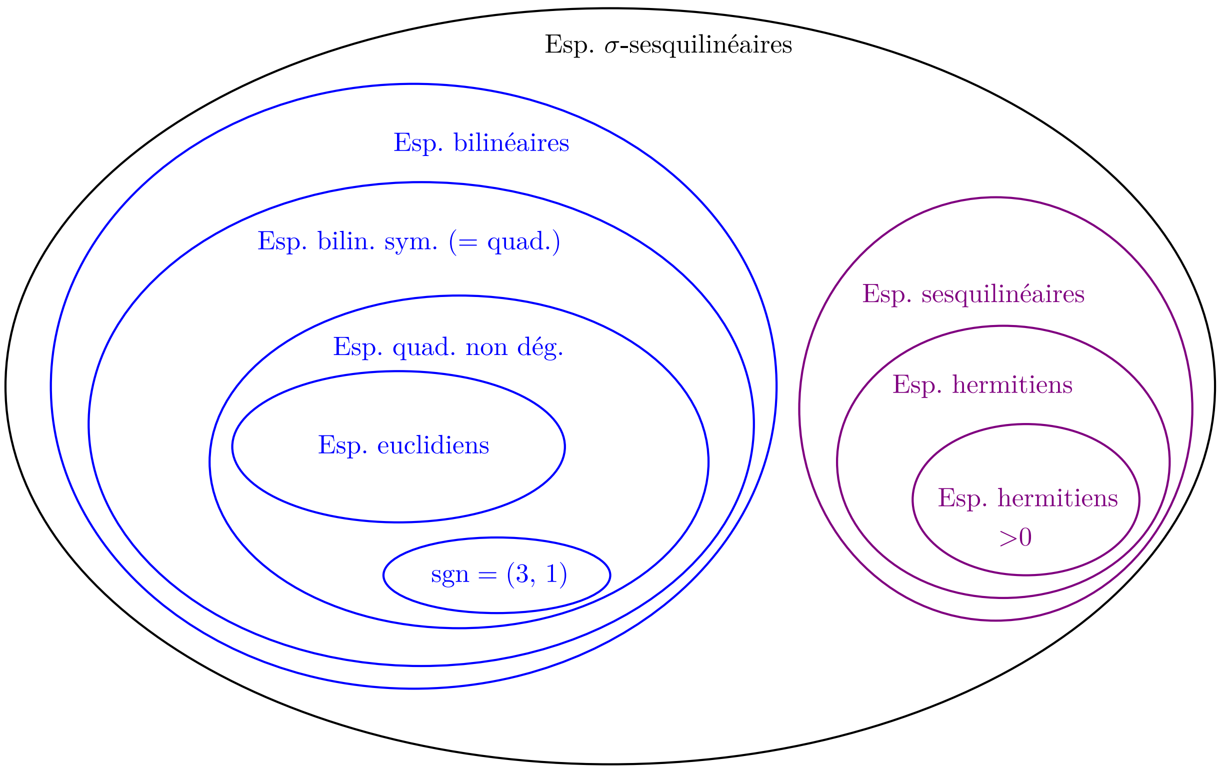
La deuxième partie du cours est issue à l'origine du livre de Jean Fresnel, *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens* [Fre99]. Elle a ensuite été retravaillée avec les livres de François Combes, *Algèbre et géométrie* [Com98] et Pierre Mazet, *Algèbre et géométrie* [Maz96], ainsi qu'avec les références utilisées pour la première partie.

La dernière section sur la décomposition en valeurs singulières provient du livre de Llyod N. Trefethen et David Bau, *Numerical linear algebra* [TB97].

Je remercie William Dallaporta pour sa relecture minutieuse et ses nombreux commentaires pertinents.

Guide

Les résultats repérés par une ampoule  sont suffisamment riches pour faire l'objet d'un développement. Les faits repérés par une fleur  sont à retenir. Les exercices sont signalés par un crayon  .



Première partie

Espaces vectoriels quadratiques

Formes quadratiques sur un espace vectoriel. Orthogonalité, isotropie. Applications

(les objets)

Leçon 1

Formes quadratiques

Objectifs de la leçon

- être à l'aise avec la représentation matricielle d'une forme bilinéaire (symétrique) ou d'une forme quadratique ;
- connaître les différentes notions associées à une forme bilinéaire (symétrique) ou à une forme quadratique : noyau, rang, orthogonalité, isotropie ;
- avoir en tête des espaces quadratiques variés : dégénéré, non-dégénéré, non isotrope, isotrope, totalement isotrope.

Dans tout le cours, $\mathbb{K}$ désigne un corps, a priori quelconque, mais il sera presque toujours de caractéristique différente de 2, et souvent égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On s'intéressera dans ce cours uniquement aux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Il existe cependant des espaces quadratiques intéressants de dimension infinie [1].

Nous utilisons trois points de vue sur les formes quadratiques :

- si b est une forme bilinéaire sur $E \times E$, alors $x \mapsto b(x, x)$ est une forme quadratique sur E (cette description est notre définition de la notion de forme quadratique). Il y a même unicité de la forme bilinéaire (en caractéristique $\neq 2$, pour une forme quadratique fixée) si on lui demande d'être symétrique. La forme bilinéaire permet de définir un notion d'*orthogonalité* ;
- en dimension finie et en fixant une base, on peut représenter une forme quadratique par un polynôme homogène de degré 2 ;
- en dimension finie et en fixant une base, on peut représenter une forme quadratique matriciellement par une application de la forme $X \mapsto {}^tXAX$, où A est une matrice symétrique.

1.1 Formes bilinéaires

On décrit ici quelques notions de base sur les formes bilinéaires.

1.1.1 Définition et exemples

1. Un exemple est donné par les espaces de fonctions. La branche des mathématiques qui les étudie, l'analyse fonctionnelle, les munit d'une norme pour laquelle ils sont complets (on a affaire à la notion d'espace de Banach). Lorsque cette norme provient d'un produit scalaire (dans le cas $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), ces espaces sont appelés espaces de Hilbert.

Définition 1.

On appelle *forme bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$*, ou encore *forme bilinéaire sur E*, toute application $b : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que :

1. pour tout $x \in E$, l'application $b(x, -) : y \mapsto b(x, y)$ est linéaire (linéarité à droite),
2. pour tout $y \in E$, l'application $b(-, y) : x \mapsto b(x, y)$ est linéaire (linéarité à gauche).

On note $\mathcal{B}(E \times E, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur E.

Exemples.

1. Soit $(f, g) \in (E^*)^2$, où $E^* \coloneqq \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ (l'espace vectoriel des formes linéaires sur E). L'application $b : (x, y) \mapsto f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire sur E.
2. Une combinaison linéaire d'applications du type précédent est bilinéaire, et réciproquement !

Exercice.

Démontrer l'énoncé du deuxième exemple.

1.1.2 Matrices associées à une forme bilinéaire

On suppose l'espace vectoriel E muni d'une base $\mathbf{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Soit b une forme bilinéaire sur E. En développant par linéarité, on trouve que pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et pour tout $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i b\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]} x_i y_j b\left(e_i, e_j\right).$$

En posant $A \coloneqq (b(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$, on en déduit que b est représentée dans la base $\mathbf{B}$ par l'application $(X, Y) \mapsto {}^t XAY$.

La matrice A caractérise donc la forme bilinéaire b et il est donc naturel de lui donner un nom.

Définition 2.

On dit que la matrice

$$M_{\mathbf{B}}(b) \coloneqq (b(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

représente b dans la base $\mathbf{B}$ ou encore que c'est la *matrice associée à b dans la base $\mathbf{B}$*.

Exemple (fondamental). La matrice associée à l'application bilinéaire $(X, Y) \mapsto {}^t XAY$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est A.

Exercice.

Montrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{B}(E \times E, \mathbb{K})$ est n^2.

Proposition 3.
Soit b une forme bilinéaire sur E. Soient $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathbf{B}_1$ à $\mathbf{B}_2$. Alors

$$M_{\mathbf{B}_2}(b) = {}^t P M_{\mathbf{B}_1}(b) P.$$

Démonstration. Soient x et y deux vecteurs de E, de matrices de coordonnées respectives X' et Y' dans $\mathbf{B}_2$. Alors leurs matrices de coordonnées respectives dans $\mathbf{B}_1$ sont PX' et PY', si bien que

$$b(x,\, y) = {}^t(PX')A(PY') = {}^tX'({}^tPAP)Y'.$$

Ceci assure que ${}^tPAP$ est bien la matrice représentant b dans $\mathbf{B}_2$. $\square$

1.1.3 Action par congruence

L'action par congruence ($(P,\, M) \mapsto PM\,{}^tP$) est utile pour étudier les espaces quadratiques (partie I). Elle est différente[2] de l'action par conjugaison ($(P,\, M) \mapsto PMP^{-1}$) qui apparaît lorsque l'on étudie des applications linéaires (partie II).

Définition 4.

> Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *congruente à* B, et l'on note $A \approx B$, lorsqu'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PB{}^tP$.

L'application

$$(P,\, M) \mapsto PM\,{}^tP$$

définit une action à gauche de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont congruentes si et seulement si elles sont dans une même orbite pour cette action, si bien que la relation de congruence est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ses classes d'équivalence, qui sont les orbites pour l'action par congruence, sont appelées les *classes de congruence*.

Citons quelques conséquences immédiates de la définition :

- deux matrices congruentes ont même rang ;
- les déterminants de deux matrices congruentes sont liés par un facteur carré non nul de $\mathbb{K}$;
- toute matrice congruente à une matrice (anti)symétrique est (anti)symétrique (on restreindra l'action de congruence aux matrices symétriques dans la section 2.2).

Le résultat sur les déterminants indique qu'un invariant potentiellement intéressant associé à la classe de congruence d'une matrice inversible A est la classe de $\det(A)$ dans le groupe quotient $\mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$, où $(\mathbb{K}^*)^2$ désigne les carrés de $\mathbb{K}^*$.

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cet invariant n'a pas d'intérêt mais lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il décrit le signe du déterminant.

Exercice.

Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ont même rang mais ne sont pas congruentes sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Comme on peut écrire

$${}^tPAP = ({}^tP)A{}^t({}^tP),$$

on déduit de la proposition 3 que les matrices associées à une forme bilinéaire sur E forment une classe de congruence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.2 Forme quadratique associée à une forme bilinéaire

On s'intéresse maintenant aux formes bilinéaires symétriques qui correspondent (en caractéristique $\neq 2$) aux formes quadratiques.

2. Notons toutefois qu'une matrice de changement de base orthonormée (${}^tP = P^{-1}$) permet à la fois de décrire un changement de base pour une forme quadratique et pour un endomorphisme symétrique (ou auto-adjoint) puisque ces deux notions sont représentées dans une base par une matrice symétrique.

1.2.1 Formes bilinéaires (anti)symétriques

Définition 5.
Soit b une forme bilinéaire sur E. On dit que b est

- *symétrique* lorsque $\forall (x,\, y) \in E^2,\ b(x,\, y) = b(y,\, x)$,
- *antisymétrique* lorsque $\forall (x,\, y) \in E^2,\ b(x,\, y) = -b(y,\, x)$,
- *alternée* lorsque $\forall x \in E,\ b(x,\, x) = 0$.

On note $\mathcal{S}_2(E)$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E. On note $\mathcal{A}_2(E)$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires antisymétriques sur E.

Exercice.

1. Montrer que toute forme bilinéaire alternée sur E est antisymétrique. Montrer que la réciproque est vraie si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$.
2. En supposant $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, montrer l'égalité $\mathcal{B}(E \times E,\, \mathbb{K}) = \mathcal{S}_2(E) \oplus \mathcal{A}_2(E)$.

En notant ${}^t b$ la forme bilinéaire b appliquée aux entrées *transposées*

$$ {}^t b : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{K} \\ (x,\, y) & \mapsto & b(y,\, x), \end{array} \right. $$

on obtient

$$ \begin{array}{rcl} b \text{ symétrique} & \Leftrightarrow & {}^t b = b \\ b \text{ antisymétrique} & \Leftrightarrow & {}^t b = -b. \end{array} $$

Ainsi, comme on peut rapidement remarquer que $M_{\mathbf{B}}({}^t b) = {}^t M_{\mathbf{B}}(b)$, on obtient la caractérisation

Proposition 6.
Soient b une forme bilinéaire sur E et $\mathbf{B}$ une base de E. Alors :

1. *la forme b est symétrique si et seulement si $M_{\mathbf{B}}(b)$ est symétrique ;*
2. *la forme b est antisymétrique si et seulement si $M_{\mathbf{B}}(b)$ est antisymétrique.*

À partir de maintenant, on suppose que $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$.

1.2.2 Forme quadratique et forme polaire

Définition 7.
Soit b une forme bilinéaire sur E. L'application $q_b : E \to \mathbb{K},\ x \mapsto b(x,\, x)$ est appelée la *forme quadratique associée à b*. On note $\mathcal{Q}(E)$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E (qui sont donc obtenues en partant d'une forme bilinéaire).

On peut remarquer que, $\forall (\lambda,\, x) \in \mathbb{K} \times E$, on a $q_b(\lambda x) = \lambda^2 q_b(x)$.

Proposition 8.
Toute forme quadratique sur E est associée à une et une seule forme bilinéaire symétrique sur E, que l'on appelle sa forme polaire *et que l'on note b_q.*

Démonstration. L'application linéaire $\mathcal{B}(E \times E, \mathbb{K}) \to \mathcal{Q}(E)$, $b \mapsto q_b$ a pour noyau $\mathcal{A}_2(E)$. On déduit du théorème de factorisation (appelé aussi premier théorème d'isomorphisme) et de l'égalité $\mathcal{B}(E \times E, \mathbb{K}) = \mathcal{S}_2(E) \oplus \mathcal{A}_2(E)$ que l'application linéaire $\mathcal{S}_2(E) \to \mathcal{Q}(E)$, $b \mapsto q_b$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. □

Proposition 9 *(Formule de polarisation).*
Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire b. Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ b(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}.$$

Démonstration. La formule découle du développement par bilinéarité de b appliqué à $q(x+y)$. □

Exemples.

1. Soit $(f, g) \in (E^*)^2$, où E^*. L'application $x \mapsto f(x)g(x)$ est une forme quadratique sur E dont la forme polaire associée est $(x, y) \mapsto \dfrac{f(x)g(y) + f(y)g(x)}{2}$;
2. L'application est $A \mapsto \mathrm{tr}(A^2)$ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de forme polaire $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$;
3. L'application est $A \mapsto \mathrm{tr}(A^t A)$ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de forme polaire $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^t B)$.

Définition 10.
On appelle *espace quadratique* tout couple (E, q) formé d'un espace vectoriel E et d'une forme quadratique q sur E.

Remarque. On peut restreindre les formes quadratiques (ainsi que les formes bilinéaires) à des sous-espaces vectoriels.

1.2.3 Représentation matricielle d'une forme quadratique dans une base

On suppose l'espace vectoriel E muni d'une base $\mathbf{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Définition 11.
On appelle *matrice associée à q dans* $\mathbf{B}$, et l'on note $M_{\mathbf{B}}(q)$, la matrice **symétrique** $M_{\mathbf{B}}(b)$ associée à sa forme polaire b dans $\mathbf{B}$.

Compte-tenu de ce que l'on a vu dans la section 1.1.2, on a le résultat suivant.

Proposition 12.
La forme quadratique q sur E est représentée dans la base $\mathbf{B}$ par

$$X \mapsto {}^t X M_{\mathbf{B}}(q) X,$$

c'est-à-dire que si le vecteur X de $\mathbb{K}^n$ désigne les coordonnées d'un vecteur x de E dans la base $\mathbf{B}$, alors le nombre ${}^t X M_{\mathbf{B}}(q) X$ vaut $q(x)$.
Soient $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ deux bases de E, et P la matrice de passage de $\mathbf{B}_1$ à $\mathbf{B}_2$. Alors

$$M_{\mathbf{B}_2}(q) = {}^t P M_{\mathbf{B}_1}(q) P.$$

Remarques.

1. On en déduit que les matrices associées à une forme quadratique q sur E forment une classe de congruence dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (l'espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).
2. On peut aussi représenter les formes quadratiques à l'aide d'un polynôme homogène du second degré et c'est d'ailleurs souvent ce que l'on fait dans la pratique. Comme pour la représentation matricielle, il faut fixer une base de E. La correspondance est la suivante. Si $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ est un polynôme homogène du second degré, on peut l'écrire de façon unique :

$$P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i {X_i}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2\beta_{i,j} X_i X_j.$$

La matrice (symétrique) de la forme quadratique qui correspond au polynôme P est

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & \beta_{i,j} & \\ & \beta_{j,i} & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

1.3 Orthogonalité et isotropie

La notion d'orthogonalité par rapport à une forme bilinéaire symétrique est une simple généralisation de la notion d'orthogonalité par rapport à un produit scalaire. Dans le cadre général d'un espace bilinéaire symétrique (E, b) de dimension finie, l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel A est noté $A^{\perp_b}$ et vérifie

$$\dim A + \dim A^{\perp_b} \geq \dim E.$$

Il y a toujours égalité lorsque b n'est pas dégénérée. En revanche, et c'est la différence majeure avec la situation rencontrée dans les espaces euclidiens, l'identité $A \oplus A^{\perp_b} = E$ peut tomber en défaut à cause du problème de l'isotropie, même lorsque b n'est pas dégénérée.

On notera q la forme quadratique associée à b.

1.3.1 Noyau et rang d'une forme bilinéaire

Définition 13.

Soit $b : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique. On appelle *noyau* de b l'ensemble

$$\ker b := \{x \in E \ ; \ \forall y \in E, \ b(x, y) = 0\}.$$

(Comme la forme bilinéaire est symétrique, le rôle de x et de y pourrait être inversé.)

Proposition 14.
On rappelle que E est de dimension finie et on suppose que b est représentée par la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\dim \ker b = \dim \ker A = n - \mathrm{rg} A$.

Démonstration. Soit $x \in E$ de coordonnées X dans une base $\mathbf{B}$. On a $x \in \ker b \Leftrightarrow \forall Y, \ {}^tXAY = 0 \Leftrightarrow {}^tXA = 0 \Leftrightarrow {}^tAX = AX = 0 \Leftrightarrow X \in \ker A$. □

Définition 15.

On appelle *rang de b*, et l'on note $\mathrm{rg}(b)$, la valeur $n - \dim(\ker b)$. On dit que la forme bilinéaire b est *dégénérée* lorsque $\ker b \neq \{0\}$. On dit qu'elle est *non dégénérée* sinon.

Proposition 16 *(Principe de représentation des formes linéaires).*
Si b est non dégénérée, alors

$$\forall f \in E^*,\ \exists! a \in E\ ;\ f = b(a,\, -).$$

Démonstration. Lorsque b est non dégénérée, l'application linéaire $x \mapsto b(x,\, -)$ est un isomorphisme de E dans E^* puisque qu'elle est injective et que $\dim E = \dim E^* < +\infty$. $\square$

Exercice.

Montrer que toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire $X \mapsto \mathrm{tr}(AX)$ pour une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.3.2 Orthogonalité

Définition 17.

Soient x et y deux vecteurs de E. On dit que x est *b-orthogonal à y* lorsque $b(x,\, y) = 0$. On écrit dans ce cas $x \perp_b y$, ou plus simplement $x \perp y$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarques.

1. La bilinéarité de b assure que si un vecteur x est b-orthogonal aux vecteurs y_1, y_2, $\ldots$, y_n, alors il est b-orthogonal à toute combinaison linéaire de ces vecteurs.
2. Les éléments de $\ker b$ sont les vecteurs de E qui sont b-orthogonaux à tous ceux de E. Ainsi b est non dégénérée si et seulement si seul 0_E est b-orthogonal à tout vecteur de E.
3. Lorsque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, deux vecteurs x et y de E sont q-orthogonaux si et seulement si $q(x + y) = q(x) + q(y)$ (théorème de Pythagore). On utilise parfois *q-orthogonal* à la place de *b-orthogonal* lorsque b est la forme bilinéaire symétrique associée à q.
4. Un vecteur x est b-orthogonal à lui-même si et seulement si $b(x,\, x) = 0$. Lorsque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, les vecteurs orthogonaux à eux-même sont les vecteurs q-isotropes (définition 19) pour q la forme quadratique associée à b. En général, contrairement au cas des espaces euclidiens, il peut en exister de non-nuls même si q est non dégénérée !

Définition 18.

Soient A et B deux parties de E.

- On dit que A et B sont *b-orthogonales*, et l'on écrit $A \perp_b B$, lorsque tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B.
- On appelle *b-orthogonal* de A le sous-ensemble

$$A^{\perp_b} := \{x \in E\ ;\ \forall a \in A,\ b(x,\, a) = 0\}.$$

On utilisera les notations $A \perp B$ et $A^{\perp}$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible (avec une autre forme bilinéaire ou avec l'orthogonal au sens de la dualité).

Exercice.
Montrer que les relations $A \perp B$, $A \subset B^{\perp}$ et $B \subset A^{\perp}$ sont équivalentes.

1.3.3 Isotropie pour une forme quadratique

Définition 19.
Un vecteur x de E est dit *isotrope* (pour q) lorsque $q(x) = 0$. Dans le cas contraire, il est dit *anisotrope*. On dit que q est *isotrope* lorsqu'elle admet un vecteur isotrope **non** nul. Dans le cas contraire, on dit que q est *anisotrope*.

Exemples.
1. Une forme quadratique réelle définie positive ou définie négative est toujours anisotrope.
2. Les vecteurs isotropes de la forme quadratique $(x, y) \mapsto xy$ sont les éléments de la réunion $(\mathbb{K} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{K})$.

Si x est un vecteur isotrope, la relation $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ q(\lambda \cdot x) = \lambda^2 q(x)$ assure que tous les vecteurs de $\mathrm{Vect}(x)$ sont isotropes. Cela justifie la terminologie suivante.

Définition 20.
On appelle *cône isotrope* de q l'ensemble

$$\mathrm{Co}(q) \coloneqq \{x \in E\ ;\ q(x) = 0\}.$$

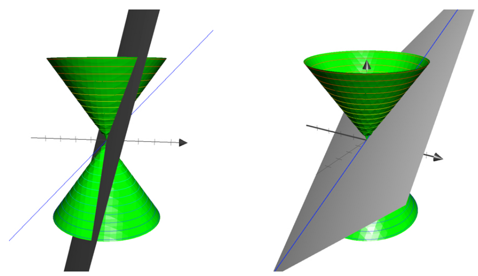
Remarque. On note $\ker q \coloneqq \ker b_q$. On a $\ker q \subset \mathrm{Co}(q)$ mais l'inclusion est stricte en général. On peut reformuler cette inclusion stricte de la façon suivante :

$$x \in \ker q \quad \Rightarrow \quad q(x) = 0$$

mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Attention aussi au fait que le cône isotrope n'est pas toujours un sous-espace vectoriel (comme son nom le laisse sous-entendre).

Exercice.
Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie, de forme polaire b. Justifier que q est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, puis en utilisant la formule de polarisation, montrer que la différentielle de q en a vaut $2b(a, -)$.

Exemple (Orthogonal d'un singleton, interprétation géométrique). Soit $a \in E$. Alors $\{a\}^{\perp}$ est le noyau de la forme linéaire $b(-, a)$: c'est un hyperplan de E si $a \notin \ker b$ et E sinon.
De plus, la condition $a \in \{a\}^{\perp}$ équivaut à $a \in \mathrm{Co}(q)$.
Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{Co}(q) \setminus \ker q$. La différentielle de q en a est la forme linéaire **non nulle** $2b(a, -)$ donc l'orthogonal $\{a\}^{\perp}$ est exactement l'hyperplan tangent à la sous-variété $\mathrm{Co}(q)$ en a.



$a \notin \mathrm{Co}(q)$ $\qquad$ $a \in \mathrm{Co}(q)$

Définition 21.

Un sous-espace F de E est dit *non isotrope* (resp. *isotrope*) lorsque $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ (resp. $\neq \{0\}$). Un sous-espace F de E est dit *totalement isotrope* lorsque $\forall x \in F$, $q(x) = 0$, i.e. lorsque $F \subset \mathrm{Co}(q)$.

Proposition 22.

Un sous-espace vectoriel F de E est totalement isotrope si et seulement si $F \subset F^{\perp}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule de polarisation aux éléments de F. □

Exemples. Nous décrivons deux espaces quadratiques de dimension 2 (distincts de $q = 0$ et du cas euclidien).

1. **Plan quadratique de rang** 1 **:** dans ce cas, $\dim(\ker q) = 1$ et $\mathrm{Co}(q) = \ker q$. La matrice de q dans une base formée d'un vecteur non nul de $\ker q$ et d'un vecteur x non nul en dehors de $\ker q$ à la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q(x) \end{pmatrix}$.
2. **Plan hyperbolique :** un plan quadratique est dit *hyperbolique* lorsqu'il existe une base dans laquelle la matrice de q est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dans la base canonique de $\mathbb{K}^2$, cette matrice correspond à la forme quadratique $(x, y) \mapsto 2xy$, ce qui justifie la terminologie (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les quadriques affines d'équation $q(x, y) = 2\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ sont des hyperboles).

Questions de fin de leçon.

En présence d'une forme quadratique (ou de sa forme bilinéaire symétrique associée),

- comment calcule-t-on sa matrice dans une base fixée ?
- qu'est-ce que le noyau d'une forme bilinéaire symétrique ? Y a-t-il un lien avec le cône isotrope ?
- si elle est non dégénérée, peut-on trouver un vecteur isotrope x ? Si oui, a-t-on $\langle x \rangle \overset{\perp}{\oplus} \langle x \rangle^{\perp}$?

Leçon 2

Réduction et classification des formes quadratiques

Objectifs de la leçon

- comprendre la réduction d'une forme quadratique sous forme diagonale et savoir effectuer une réduction de Gauss ;
- comprendre le problème de la classification des formes quadratiques ;
- savoir classifier les formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

Maintenant que la notion de forme quadratique est définie, il est naturel de s'interroger sur les différents espaces quadratiques possibles. Nous aimerions identifier les espaces quadratiques qui donnent les mêmes mesures d'angles et de distances lorsque ces deux notions sont définies. Il suffit pour cela d'identifier (E, q) et (E', q') lorsqu'il existe une application linéaire $u : E \to E'$ telle que $\forall x \in E,\ q'(u(x)) = q(x)$. À la lumière de la proposition 12, l'existence de l'application u revient à dire qu'il existe deux bases dans lesquelles les matrices de q et q' sont les mêmes.

Il est aisé de vérifier qu'une telle application u préserve *en particulier* l'orthogonalité. Nous pouvons d'ailleurs voir qu'étudier l'orthogonalité permet de commencer l'étude de la classification. Il est étonnamment facile de montrer l'existence de bases orthogonales, et même d'en construire (à l'aide de la réduction de Gauss, section 2.1.3). Les classifications sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ en découlent assez naturellement. Il faut néanmoins effectuer une analyse plus poussée lorsque l'on souhaite s'attaquer à d'autres corps.

2.1 Bases orthogonales

Nous présentons ici le principe de diagonalisation d'une forme quadratique. Nous présentons pour cela la notion de base orthogonale. Nous montrons l'existence de telles bases ainsi qu'un algorithme produisant une base orthogonale (réduction de Gauss).

2.1.1 Définition

Définition 23.

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite *q-orthogonale* lorsque ses vecteurs sont deux à deux

q-orthogonaux, i.e.
$$\forall (i,\, j) \in [\![1,\, n]\!]^2,\; i \neq j \Rightarrow b(e_i,\, e_j) = 0.$$

Remarques. 1. On convient que la famille vide de E est orthogonale.

2. On a l'équivalence des trois propriétés suivantes :
   - la base $(e_1,\, \ldots,\, e_n)$ est orthogonale pour la forme quadratique q,
   - la matrice représentant q dans $(e_1,\, \ldots,\, e_n)$ est diagonale,
   - on a l'existence de scalaires $a_1,\, \ldots,\, a_n$ tels que $q = \sum_{k=1}^{n} a_k (e_k^*)^2$, où $(e_k^*)_k$ est la base de E^* duale de $(e_k)_k$ (on a en fait $a_k = q(e_k)$).
3. Une famille $(e_1,\, \ldots,\, e_n)$ de E est dite *q-orthonormée* lorsqu'elle est orthogonale et $\forall i \in [\![1,\, n]\!]$, $q(e_i) = 1$.

Exercice.

Montrer que la base canonique des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est orthogonale (ou orthonormée) pour la forme quadratique $A \mapsto \mathrm{tr}({}^t\!AA)$, mais qu'elle ne l'est pas pour la forme quadratique $A \mapsto \mathrm{tr}(A^2)$ si $n \geq 2$.

2.1.2 Existence de bases orthogonales

Le théorème qui suit est spécifique aux formes bilinéaires symétriques car on utilise le fait que b non nulle implique l'existence d'un vecteur non isotrope (par exemple, si b est une forme bilinéaire antisymétrique, on a toujours $b(x,\, x) = 0$).

Théorème 24.
Tout espace quadratique de dimension finie admet une base orthogonale.

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence sur la dimension. Le résultat est évident lorsque la dimension est égale à 0 ou 1.

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,\, 1\}$. On suppose que tout espace quadratique de dimension strictement inférieur à n admet une base orthogonale. Soit $(E,\, q)$ un espace quadratique de dimension n.

- Si $q = 0$, alors n'importe quelle base de E fait l'affaire (car $q = 0 \Leftrightarrow b_q = 0$ par polarisation).
- Dans le cas contraire, on peut trouver un vecteur x de E tel que $q(x) \neq 0$, si bien que $\mathrm{Vect}(x)$ est une droite non isotrope de $(E,\, q)$. Par suite, en posant $H \coloneqq \mathrm{Vect}(x)^{\perp}$, on trouve $E = \mathrm{Vect}(x) \overset{\perp}{\oplus} H$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à H, on obtient une base orthogonale $(e_1,\, \ldots,\, e_n)$ de $(H,\, q_H)$, et alors $(x,\, e_1,\, \ldots,\, e_n)$ est une base orthogonale de $(E,\, q)$.

□

Corollaire 25.
Soit $(E,\, q)$ un espace quadratique de dimension n. Alors :

1. *il existe une matrice diagonale représentant q ;*
2. *il existe une famille $(a_1,\, \ldots,\, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et une base $\mathbf{B}$ dans laquelle q est représentée par le polynôme $\sum_{k=1}^{n} a_k {X_k}^2$;*
3. *il existe une base $(f_1,\, \ldots,\, f_n)$ de E^* et une famille $(a_1,\, \ldots,\, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $q = \sum_{k=1}^{n} a_k {f_k}^2$ (par rapport au point précédent, $(f_1,\, \ldots,\, f_n)$ est la base antéduale $\mathbf{B}^*$ de $\mathbf{B}$).*

2.1.3 Réduction de Gauss

Théorème 26 *(Réduction de Gauss).*
Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de E^*. On considère une forme quadratique

$$q = \sum_{k=1}^{n} a_k {f_k}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{i,j} f_i f_j .$$

Il existe un algorithme qui permet d'écrire q comme combinaison linéaire (éventuellement avec des coefficients nuls) des carrées de n formes linéaires indépendantes.

Démonstration. On procède par récurrence en réduisant d'une ou deux unités le nombre de formes linéaires à chaque étape. Le résultat est immédiat si $q = 0$ $(= \sum_{k=1}^{n} 0 \times {f_k}^2)$.

Sinon, la réduction s'effectue en distinguant deux cas :

– si l'un des a_i n'est pas nul, on permute les indices afin de se ramener au cas où $a_1 \neq 0$, on met alors sous forme canonique :

$$q = a_1 \left(f_1 + \frac{b_{1,2}}{2a_1} f_2 + \cdots + \frac{b_{1,n}}{2a_1} f_n \right)^2 + q',$$

avec q' forme quadratique qui ne dépend que de $f_2, \ldots, f_n$. En posant $l_1 \coloneqq f_1 + \frac{b_{1,2}}{2a_1} f_2 + \cdots + \frac{b_{1,n}}{2a_1} f_n$, on remarque que $(l_1, f_2, \ldots, f_n)$ est libre et $q = a_1 {l_1}^2 + q'$.

– si tous les a_i sont nuls, on permute les indices afin de se ramener au cas où $b_{1,2} \neq 0$. On écrit alors

$$q = b_{1,2} \left(f_1 f_2 + f_1 \sum_{k=3}^{n} \frac{b_{1,k}}{b_{1,2}} f_k + f_2 \sum_{k=3}^{n} \frac{b_{2,k}}{b_{1,2}} f_k \right) + q',$$

avec q' forme quadratique qui ne dépend que de $f_3, \ldots, f_n$. On pose :

$$l_1 \coloneqq b_{1,2} \left(f_1 + \sum_{k=3}^{n} \frac{b_{2,k}}{b_{1,2}} f_k \right) \text{ et } l_2 \coloneqq f_2 + \sum_{k=3}^{n} \frac{b_{1,k}}{b_{1,2}} f_k .$$

On a alors $q = l_1 l_2 + q''$ avec $q'' \coloneqq q' - b_{1,2} \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{b_{2,k}}{b_{1,2}} f_k \right) \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{b_{1,k}}{b_{1,2}} f_k \right)$ qui ne dépend que de $f_3, \ldots, f_n$. On peut remarquer que la famille $(l_1, l_2, f_3, \ldots, f_n)$ est libre, puis que $\left(\frac{l_1+l_2}{2}, \frac{l_1-l_2}{2}, f_3, \ldots, f_n \right)$ l'est aussi et que l'on a $q = \left(\frac{l_1+l_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{l_1-l_2}{2} \right)^2 + q''$.

□

Exercice.

1. Appliquez la réduction de Gauss à la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$

$$q : (x, y, z, t) \mapsto xy - 2xz - 4yz + 2xt + zt.$$

2. Décrire matriciellement le résultat.

Remarques. 1. Il y a aussi une réduction de Gauss matricielle (voir par exemple le chapitre I dans [cdSP]). Les deux algorithmes sont similaires mais ne sont pas exactement les mêmes : chacun est la version "duale" de l'autre.

2. En effet, la réduction de Gauss présentée ici est appliqué à la forme quadratique q représentée dans la base $\mathbf{B}^* = (f_1, \ldots, f_n)$. Elle fournit une base $(\mathbf{B}')^*$ de E^*, duale d'une base orthogonale $\mathbf{B}'$. Elle donne aussi la matrice de passage P de $\mathbf{B}^*$ vers $(\mathbf{B}')^*$. La matrice de passage de la base $\mathbf{B}$ à la base $\mathbf{B}'$ est donc ${}^tP^{-1}$. L'algorithme de la réduction de Gauss matricielle donne la matrice ${}^tP$.

3. Notez que la diagonalisation des formes quadratiques est assez élémentaire, contrairement à la réduction des endomorphismes. Attention cependant au fait que la matrice diagonale qui apparaît dans le cadre de la congruence n'est pas unique à permutation près, comme dans le cadre de la réduction des endomorphismes. Il suffit, par exemple, de remarquer que les matrices (a) et $(\lambda^2 a)$ sont congruentes pour s'en convaincre. La classe de congruence ne correspond pas non plus à une égalité modulo multiplication par des carrés et à permutation près comme le montre l'égalité suivante :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & (a+b)ab \end{pmatrix}.$$

2.2 Classification des formes quadratiques

Dans cette section, nous décrivons le problème de la classification des formes quadratiques et nous y répondons dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nous nous contentons de quelques remarques pour les autres corps.

2.2.1 Le problème de la classification

Dans cette partie, E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
On définit tout d'abord l'équivalence entre deux formes quadratiques.

Définition 27.
Soient (E, q) et (F, q') deux espaces quadratiques. On appelle *morphisme* de (E, q) dans (F, q') toute application linéaire $u : E \to F$ telle que
$$\forall x \in E,\ q'(u(x)) = q(x).$$
Les morphismes injectifs sont appelés les *isométries (vectorielles)* et les morphismes bijectifs sont appelés les *isomorphismes*.
On dit que les formes q et q' sont *équivalentes*, et l'on écrit $q \simeq q'$, lorsqu'il existe un isomorphisme de (E, q) sur (F, q').

La relation d'équivalence (c'en est bien une !) entre formes quadratiques peut se comprendre avec la relation de congruence. En effet, la congruence dit maintenant deux choses :
- deux matrices symétriques congruentes représentent la même forme quadratique sur un espace vectoriel E dans deux bases différentes de E ;
- deux matrices symétriques congruentes représentent deux formes quadratiques équivalentes dans une base fixée de E pour q et dans une base fixée de F pour q'.

Remarques. 1. Dit autrement, il y a une équivalence entre :
   - les formes quadratiques q et q' sont équivalentes ;
   - q et q' ont la même classe de congruence de matrices symétriques associées ;
   - q et q' sont représentées (dans des bases a priori différentes) par le même polynôme homogène de degré 2.
2. La notion d'isométrie sera étudiée dans la partie II. On choisit cette notion d'équivalence entre espaces quadratiques justement car elle a des propriétés intéressantes : respect de l'orthogonalité, des distances...

2.2.2 La classification sur $\mathbb{C}$

Dans cette section, (E, q) désigne un espace quadratique **complexe**.

Théorème 28.

1. *Soit q une forme quadratique complexe de dimension n et de rang r. Alors q est représentée dans une certaine base par la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*
2. *Deux formes quadratiques complexes de même dimension finie sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

Démonstration. D'après le théorème d'existence d'une base orthogonale (et son corollaire 25), il existe une matrice diagonale $\operatorname{diag}(d_j)$ représentant q. Quitte à réordonner la base utilisée, on peut supposer que $d_j \neq 0$ si $j \leq r$ et $d_j = 0$ lorsque $j > r$. Pour $j \leq r$, on définit $p_j \coloneqq (\delta_j)^{-1}$, où δ_j est une racine carrée de d_j ; pour $j > r$, on fixe $p_j \coloneqq 1$. On obtient alors la relation

$$\operatorname{diag}(p_j)\operatorname{diag}(d_j)\,{}^t\!\operatorname{diag}(p_j) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui donne le résultat. □

Corollaire 29.

Toute matrice symétrique complexe inversible de taille n est congruente à I_n.

2.2.3 La classification sur $\mathbb{R}$

Dans cette section, (E, q) désigne un espace quadratique **réel** de forme polaire b.
Nous montrons le théorème d'inertie de Sylvester qui assure que la forme quadratique q est représentée dans une certaine base par une matrice par bloc $\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec r et s qui ne dépendent que de q.

Définition 30.

On dit que q est *positive* (resp. *définie positive*), et l'on note $q \geq 0$ (resp. $q > 0$), lorsque

$$\forall x \in E,\ q(x) \geq 0 \text{ (resp. } \forall x \in E\backslash\{0\},\ q(x) > 0).$$

On définit les notions : *négative* et *définie négative* de manière similaire.

Exemples.
1. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la forme quadratique $A \mapsto \operatorname{tr}({}^tAA)$ est définie positive mais la forme quadratique $A \mapsto \operatorname{tr}(A^2)$ n'est ni positive, ni négative lorsque $n \geq 2$.
2. La forme quadratique $(x, y) \mapsto -x^2$ est négative.
3. La forme quadratique $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ n'est ni positive, ni négative.

Notation. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^-(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives, négatives, définies négatives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice.

Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est la classe de congruence de I_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi deux formes quadratiques définies positives de même dimension sont toujours équivalentes.

Proposition 31 *(Inégalité de Cauchy–Schwarz).*
On suppose que l'espace quadratique (E, q) est réel positif. Étant donné $(x, y) \in E^2$, on a toujours

$$b(x, y)^2 \leq q(x)q(y),$$

et, si $q > 0$, l'égalité $b(x, y)^2 = q(x)q(y)$ a lieu si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Démonstration.

- La fonction polynomiale

$$f : t \mapsto q(tx + y) = q(x)t^2 + 2b(x, y)t + q(y)$$

est à valeurs positives. Si $q(x) = 0$, la positivité de f nous assure le résultat souhaité. Si $q(x) \neq 0$, la fonction polynomiale f est du second degré, donc son discriminant $4\left(b(x, y)^2 - q(x)q(y)\right)$ est négatif, ce qu'il fallait démontrer.

- On suppose maintenant $q > 0$. S'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = tx$, alors

$$b(x, y)^2 = (tb(x, x))^2 = t^2 q(x)^2 = q(x)q(tx) = q(x)q(y).$$

On obtient le même résultat en échangeant le rôle de x et y.
Réciproquement, supposons que $b(x, y)^2 = q(x)q(y)$. Si $q(x) = 0$, alors $x = 0$ donc (x, y) est liée. Sinon, le discriminant de la fonction f est nul, donc il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $q(t_0x + y) = f(t_0) = 0$. Ainsi $t_0x + y = 0$ puisque $q > 0$, ce qui donne le résultat souhaité.

□

En corollaire, on obtient :

Proposition 32 *(Inégalité de Minkowski).*
Soit (E, q) un espace quadratique réel positif. Alors

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \sqrt{q(x + y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}.$$

La fonction $\sqrt{q}$ est donc une semi-norme. C'est une norme si et seulement si q est définie positive.

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a pour tout $(x, y) \in E^2$

$$\left(\sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}\right)^2 - \left(\sqrt{q(x + y)}\right)^2 = 2\left(\sqrt{q(x)q(y)} - b(x, y)\right) \geq 0.$$

□

Définition 33.
Soit (E, q) un espace quadratique réel (de dimension finie). On définit $i_+(q)$ comme la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de E tel que $q_{|F} > 0$ ($q_{|F}$ désigne la restriction de q au sous-espace vectoriel F). On définit $i_-(q)$ comme la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel G de E tel que $q_{|G} < 0$.
Le couple $\operatorname{sgn}(q) := (i_+(q), i_-(q)) \in \mathbb{N}^2$ est appelé la *signature* de q.

Deux formes quadratiques réelles équivalentes ont évidemment même signature.

Théorème 34 *(d'inertie de Sylvester).*
Soit q une forme quadratique réelle de dimension n. Il existe deux entiers r et s et une base $\mathbf{B}$ tels que

$$M_{\mathbf{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, le couple $(r,\, s)$ est la signature de q (et son rang est $r+s$).

En particulier, si l'on connait une base (e_k) de diagonalisation de q, on obtient

$$r = i_+(q) = \operatorname{card}\{k \in [\![1,\, n]\!]; q(e_k) > 0\} \text{ et } s = i_-(q) = \operatorname{card}\{k \in [\![1,\, n]\!]; q(e_k) < 0\}.$$

Démonstration. La première partie de l'énoncé s'obtient de façon similaire au théorème 28 en utilisant une base de diagonalisation puis l'identification $\mathbb{R}^*/(\mathbb{R}^*)^2 \simeq \{\pm 1\}$. L'énoncé relatif au rang découle directement de la forme de $M_{\mathbf{B}}(q)$ ainsi obtenue.

Considérons une base $(e_1,\, \dots,\, e_n)$ dans laquelle q est représentée par une matrice comme celle décrite dans l'énoncé. En posant $F \coloneqq \operatorname{Vect}(e_1,\, \dots,\, e_r)$ et $G \coloneqq \operatorname{Vect}(e_{r+1},\, \dots,\, e_n)$, on a clairement $q_{|F} > 0$ et $q_{|G} \leq 0$. Par suite, $i_+(q) \geq \dim F$. Pour l'inégalité inverse, considérons un sous-espace vectoriel F_1 de E tel que $q_{|F_1} > 0$ et $\dim F_1 = i_+(q)$. Comme $q_{|G} \leq 0$, on a nécessairement $F_1 \cap G = \{0\}$, donc

$$i_+(q) = \dim F_1 = \dim(F_1 + G) - \dim G \leq \dim E - \dim G = \dim F.$$

On a donc prouvé $i_+(q) = r$, et l'on obtient de même $i_-(q) = s$. $\square$

Corollaire 35.
Deux formes quadratiques réelles de même dimension finie sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature.

Exemple. Étant donné la réduction de Gauss obtenue à l'exercice de la section 2.1.3, la signature de la forme quadratique réelle

$$q : (x,\, y,\, z,\, t) \mapsto xy - 2xz - 4yz + 2xt + zt$$

est $(2,\, 2)$.

Exercice.

En utilisant la décomposition $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que la signature de la forme quadratique $q : A \mapsto \operatorname{tr}(A^2)$ est $(\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\, \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \left(\frac{n(n+1)}{2},\, \frac{n(n-1)}{2}\right)$.

Nous terminons cette section en citant l'important lemme de Morse qui justifie l'intérêt des formes quadratiques réelles pour l'étude locales de sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

Application au lemme de Morse
On peut démontrer le lemme de Morse qui donne la topologie d'une fonction lisse au voisinage d'un point critique a non dégénéré en fonction de la différentielle seconde $d^2 f(a)$ (ou de la matrice hessienne) (voir VI-3.4.1 dans [cdSP] par exemple).

2.3 Classification des formes quadratiques, suite

Sur un corps quelconque, nous avons vu que la réduction de Gauss (section 2.1.3) permet de se ramener à une forme quadratique diagonale

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_1{x_1}^2 + a_2{x_2}^2 + \cdots + a_n{x_n}^2.$$

Pour déterminer ensuite les classes d'équivalence des formes quadratiques diagonales, l'arithmétique du corps $\mathbb{K}$ entre en jeu. Les formes quadratiques complexes sont classifiées par leur rang tandis que les formes quadratiques réelles sont classifiées par leur signature. La classification sur d'autres corps ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_q$, $\ldots$) peut être simplifiée par le théorème de Witt qui peut se décliner en deux versions :

- un théorème de prolongement des isométries (Théorème VII-1.0.11 de [cdSP]) ;
- un théorème de simplification des formes quadratiques (Théorème VII-1.0.12 de [cdSP]).

Le principe qui ressort du théorème de Witt est que toute forme quadratique non dégénérée se décompose, de manière essentiellement unique, comme somme orthogonale d'une forme hyperbolique (une somme orthogonale de plans hyperboliques) et d'une forme anisotrope (qui ne possède pas de vecteurs isotropes non nuls). La conséquence est que la classification des formes quadratiques sur un corps donné se réduit à celle des formes anisotropes.

Nous ne détaillerons pas ici la théorie de Witt mais nous pouvons tout de même dire que la classification des formes quadratiques

- sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ est tout à fait accessible et se fait à l'aide de la dimension et du déterminant (voir IX-4 de [cdSP] pour une version utilisant le théorème de Witt) ;
- sur le corps $\mathbb{Q}$ est plus élaborée (voir IX-5 de [cdSP] pour le début de l'histoire) et l'exercice suivant.

Exercice.

Soient $p \in \mathbb{N}$ et q_p la forme quadratique sur $\mathbb{Q}$ représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{Q}^2$. Montrer que les formes quadratiques $(q_p)_{\{p \text{ premier}\}}$ forment une famille infinie de formes anisotropes non congruentes sur $\mathbb{Q}^2$.

Questions de fin de leçon.

Dans un espace quadratique,

- qu'est-ce qu'une base orthogonale ?
- existe-t-il des bases orthogonales ? Si oui, peut-on les calculer effectivement ?
- est-ce que la vie est la même que dans un autre espace quadratique ? Comment les classifier ?

Deuxième partie

Géométrie, souvent euclidienne et hermitienne

en particulier les applications naturelles dans le contexte des espaces quadratiques euclidiens et hermitiens

(les morphismes)

Leçon 3

Le groupe orthogonal euclidien

Objectifs de la leçon

- connaître des exemples d'automorphisme orthogonaux ;
- savoir décrire un ensemble de générateurs du groupe orthogonal et du groupe spécial orthogonal ;
- connaître le groupe orthogonal en dimension 2 et la notion d'angle.

Dans le cas d'un espace vectoriel réel de dimension finie, la loi d'inertie de Sylvester classifie les espaces quadratiques possibles. On traitera principalement le cas où q est définie positive. Ainsi, la forme quadratique induit une norme grâce à l'inégalité de Minkowski. Dans ce cas, à l'aide d'une base orthonormée, l'espace quadratique s'identifie alors à $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Un espace euclidien (E, q) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie munie d'une forme quadratique définie positive q. Dans un tel espace, on peut définir certaines notions géométriques classiques : norme, orthogonalité, angle, droite passant par l'origine, plan passant par l'origine, aire, ... mais pas d'autres qui sont réservées à la géométrie affine (distance, parallélisme, barycentre, alignement, ...).

Les automorphismes qui préservent la forme quadratique sont appelés les automorphismes orthogonaux. Nous pouvons les comprendre de deux manières : soit en trouvant un système de générateurs du groupe orthogonal, soit en déterminant leur réduction. Leur réduction (que l'on verra dans la leçon suivante) peut se faire en base orthonormée et découle des dimensions 1 et 2. En dimension 2, on présente ici une notion d'angle qui donne une vision géométrique : les automorphismes orthogonaux de déterminant positif sont les *rotations planes*, ce qui explique qu'on les appellera *rotations* même en dimension supérieure.

3.1 Le groupe orthogonal

L'ensemble des isomorphismes d'un espace quadratique vers lui-même possède une structure de groupe. Nous donnons quelques exemples et fixons quelques appellations.

3.1.1 Les automorphismes orthogonaux

Dans la suite, on notera φ la forme polaire de q et on supposera toujours que φ **est non dégénérée**, c'est-à-dire que $E^{\perp} = \{0\}$. On note $\mathbf{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Définition 36.

On appelle *automorphisme orthogonal (ou isométrie vectorielle)* de $(E,\, q)$ tout isomorphisme de $(E,\, q)$ sur $(E,\, q)$, c'est-à-dire tout automorphisme u de E tel que $\forall x \in E,\, q(u(x)) = q(x)$. L'ensemble de ces automorphismes est noté $O(E,\, q)$ ou encore $O(q)$ ou $O(E)$.

Remarques.

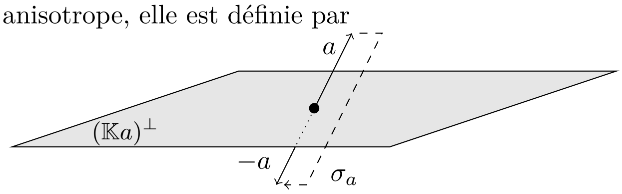
1. L'assertion $\forall x \in E,\, q(u(x)) = q(x)$ est équivalente à l'assertion $\forall x,\, y \in E,\, \varphi(u(x),\, u(y)) = \varphi(x,\, y)$, où φ est la forme polaire associée à q.
2. Demander $\varphi(u(e_i),\, u(e_j)) = \varphi(e_i,\, e_j)\ \forall\, i,\, j$ est suffisant ; matriciellement on obtient :
$$ {}^t U M_{\mathbf{B}}(q) U = M_{\mathbf{B}}(q). $$
3. La relation matricielle donne $\det u = \det U \in \{\pm 1\}$ ($M_{\mathbf{B}}(q)$ inversible car q non dégénérée).
4. L'endomorphisme u envoie vecteurs orthogonaux sur vecteurs orthogonaux. Un automorphisme orthogonal vérifie donc
$$ u : F \overset{\perp}{\oplus} G \to u(F) \overset{\perp}{\oplus} u(G) $$
et est caractérisé par $u_{|F}$ et $u_{|G}$.
5. Si x est un vecteur propre anisotrope (*i.e.* $q(x) \neq 0$), alors $u(x) = \pm x$. En effet, $0 \neq \varphi(x,\, x) = \varphi(u(x),\, u(x)) = \lambda^2 \varphi(x,\, x)$.

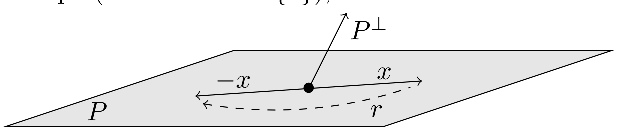
Exercice.
Trouver un contre-exemple si $q(x) = 0$.

Proposition 37.
L'ensemble $O(q)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ *que l'on appelle le groupe orthogonal de q.*

Démonstration. L'application $(u,\, q) \mapsto q \circ u$ définit une action à droite du groupe $\mathrm{GL}(E)$ sur l'ensemble des formes quadratiques sur E. Le stabilisateur de q pour cette action est $O(q)$. $\square$

Exemples (d'automorphismes orthogonaux).

1. La *symétrie orthogonale* ou *réflexion* (orthogonale) d'hyperplan $(\mathbb{K}a)^\perp$: pour $a \in E$ anisotrope, elle est définie par
$$ \sigma_a : E \to E,\ x \mapsto x - 2\frac{\varphi(x,\, a)}{q(a)} a $$


On a $\sigma_a(a) = -a$ et $\sigma_a(x) = x$ si $x \in (\mathbb{K}a)^\perp$. En choisissant une base orthogonale $(e_1 = a,\, e_2,\, \ldots,\, e_n)$, on voit que $\sigma_a \in O(q)$ et que $\det \sigma_a = -1$. De plus, ${\sigma_a}^2 = \mathrm{id}$;
2. Le *renversement* : soit P un plan non isotrope (*i.e.* $P \cap P^\perp = \{0\}$), on définit
$$ r : E \to E,\ x \mapsto \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \in P \\ x & \text{si} \quad x \in P^\perp \end{cases} $$


Alors $r \in O(q)$, $\det r = 1$ et $r^2 = \mathrm{id}$ (une fois qu'on aura une notion d'angle, on pourra dire que c'est une rotation d'angle π sur P, sinon on peut penser à une bouteille qui se renverse) ;
3. De façon générale, une *symétrie orthogonale* est une involution σ (*i.e.* telle que $\sigma^2 = \mathrm{id}$) vérifiant $(E_1)^\perp = E_{-1}$.

Exercice.
Vérifier qu'il existe des involutions qui ne sont pas des automorphismes orthogonaux.

Définition 38.
On note $SO(q) \coloneqq \{u \in O(q)\ ;\ \det u = 1\}$, appelé *groupe spécial orthogonal* de $(E,\,q)$. C'est un sous-groupe distingué de $O(q)$ et ces éléments sont appelés les *rotations* de $(E,\,q)$. Le groupe $SO(q)$ est encore noté $O^+(q)$, et le complémentaire $O(q)\backslash O^+(q)$ est noté $O^-(q)$.

Dans le cas où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et en utilisant le fait que q est non dégénérée, la loi d'inertie de Sylvester (théorème 34) nous assure qu'il existe une base $\mathbf{B}$ dans laquelle $M_{\mathbf{B}}(q) = I_{r,\,s} := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$, avec $\operatorname{sgn}(q) = (r,\,s)$.

Définition 39.
Dans ce contexte, on définit

$$O_{r,\,s}(\mathbb{R}) := \{U \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tU I_{r,\,s} U = I_{r,\,s}\} \text{ et } SO_{r,\,s}(\mathbb{R}) := \{U \in O_{r,\,s}(\mathbb{R}) \mid \det U = 1\}.$$

Plus particulièrement, $O_n(\mathbb{R}) := O_{n,\,0}(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R}) := SO_{n,\,0}(\mathbb{R})$.

3.1.2 Les symétries orthogonales

Nous avons vu comme exemple d'automorphisme orthogonal les symétries orthogonales. Nous montrons ici que l'ensemble des symétries orthogonales est stable par conjugaison.

Étant donné un sous-espace vectoriel F (non isotrope) de E, la symétrie orthogonale de E par rapport à F est la symétrie de E par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$. Cette symétrie est un automorphisme orthogonal de E car elle est obtenue par recollement des automorphismes orthogonaux id_F et $-\mathrm{id}_{F^\perp}$.

Proposition 40.
Soit s une symétrie orthogonale de E par rapport à un sous-espace vectoriel F, et $u \in O(E)$. Alors $u \circ s \circ u^{-1}$ est la symétrie orthogonale de E par rapport à $u(F)$.

Démonstration. Le conjugué $u \circ s \circ u^{-1}$ appartient à $O(E)$ et est involutif (calculs que je vous laisse vérifier) : c'est donc une symétrie orthogonale de E (à vérifier aussi). De plus, pour tout $x \in E$,

$$(u \circ s \circ u^{-1})(x) = x \Leftrightarrow s(u^{-1}(x)) = u^{-1}(x) \Leftrightarrow u^{-1}(x) \in F \Leftrightarrow x \in u(F),$$

donc $u \circ s \circ u^{-1}$ est la symétrie orthogonale de E par rapport à $u(F)$. $\square$

3.1.3 Les espaces euclidiens

Bien que certains résultats que nous allons présenter soient valables lorsque $(E,\,q)$ est non dégénéré, nous nous restreignons maintenant au cas où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et q est définie positive. D'après la loi d'inertie de Sylvester (théorème 34), il existe une base $\mathbf{B}$ pour laquelle $M_{\mathbf{B}}(q) = I_n$. C'est le cas le plus intéressant en pratique car il permet de modéliser la géométrie de l'espace dans lequel nous vivons. Nous dirons alors que l'espace $(E,\,q)$ est euclidien. Par ailleurs, l'absence de vecteurs isotropes rend certaines démonstrations plus faciles dans ce cadre.

Un deuxième cas d'intérêt, que nous n'étudierons pas ici, est celui pour lequel il existe une base $\mathbf{B}$ telle que $M_{\mathbf{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il permet de modéliser la géométrie de l'espace-temps en relativité générale.

Définition 41.

> Un *espace vectoriel euclidien* est un espace quadratique (E, q) où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et q est une forme quadratique définie positive. On appelle *produit scalaire* la forme bilinéaire symétrique φ associée à q. Une base $\mathbf{B} = (e_i)$ est *orthonormale* ou *orthonormée* (*BON*) pour φ si $\forall i,\ q(e_i) = 1$ et $\forall i \neq j,\ \varphi(e_i, e_j) = 0$.

Remarque. Il existe une base orthonormée si, et seulement si, φ est définie positive.

Exemples.
- *Canonique* : $E = \mathbb{R}^n$, $\varphi(X, Y) = (X, Y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$, où $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ et $Y = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$. La base formée des vecteurs ${}^t\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est orthonormée. Quitte à choisir une bonne base, on peut toujours se ramener à ce cas ;
- $E \subset \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ de dimension finie et $\varphi(f, g) = (f, g) := \int_a^b f(t)g(t)dt$;
- $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi(A, B) = (A, B) := \mathrm{tr}({}^tAB)$.

Remarque. Si (E, q) est euclidien et $F \subset E$, alors $(F, q_{|F})$ est aussi euclidien.

Dans la suite de cette leçon et pour la suivante, (E, q) est un espace euclidien.

En application de l'inégalité de Minkowski (proposition 32) qui nous assure que $||-|| := \sqrt{q}$ est une norme, on obtient :

Orthonormalisation de Gram–Schmidt
Il existe toujours une base *orthonormée* et on sait la construire (si on connait une base).

3.2 Générateurs de $O_n(\mathbb{R})$

Une partie génératrice simple du groupe orthogonal $O(E)$ est constituée des réflexions. Ce résultat se généralise pour un espace quadratique non dégénéré quelconque mais nous pouvons, dans le cas euclidien, donner un énoncé plus précis : le nombre minimal de réflexions nécessaires pour écrire un automorphisme orthogonal comme un produit de réflexions se décrit en fonction de la dimension du sous-espace des points fixes de l'automorphisme orthogonal.

Théorème 42.
Soit $u \in O(E)$. Alors u est un produit de r réflexions, où $r := \mathrm{rg}(u - \mathrm{id}_E) \leq n$.
Autrement dit, en notant $d_u := \dim E_1(u) = \dim\ker(u - \mathrm{id}_E)$, l'automorphisme orthogonal u peut s'écrire comme un produit de $n - d_u$ réflexions, et ce nombre est minimal.

Remarques. – Le groupe orthogonal $O(q)$ est donc engendré par les réflexions ;

– on convient que id_E est un produit de zéro réflexion.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $n - d_u \geq 0$:

– le cas $n - d_u = 0$ est vrai par convention ;

– soit $x \in E_1(u)^\perp$ non nul et $y = u(x) \neq x$. Comme $E_1(u)$ est stable par u, il en est de même pour $E_1(u)^\perp$ et $y \in E_1(u)^\perp$. On a $\varphi(x+y, x-y) = q(x) - q(y) = 0$ donc la réflexion σ_{x-y} $(= \sigma_{x-u(x)})$ envoie $x - y$ sur $y - x$ et $x + y$ sur $x + y$. Ainsi $\sigma_{x-y}(y) = x$. Comme $x - y \in E_1(u)^\perp$, on a de plus $\sigma_{x-y|E_1(u)} = \mathrm{id}$. Donc $E_1(\sigma_{x-y}u) \supset E_1(u) \oplus \langle x \rangle$ et $d_{\sigma_{x-y}u} > d_u$. On conclut à l'aide de l'hypothèse de récurrence.

– pour σ une réflexion, on a $\dim E_1(\sigma) = n - 1$, ainsi $\dim E_1(\sigma_1 \cdots \sigma_r) \geq n - r$ et le nombre r de réflexions nécessaires pour décomposer u est supérieur à $n - d_u$.

$\square$

Remarque. Si σ est une réflexion, on a $\det \sigma = -1$; donc si $u \in SO(q)$, on a $n - d_u$ pair.

Exercice.

On considère l'isométrie u dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En suivant la démonstration précédente, écrire u comme un produit de réflexions.

Théorème 43.
Pour $n \geq 3$, $SO(q)$ est engendré par les renversements ; précisément, tout élément de $SO(q)$ est produit d'au plus $n - d_u$ renversements ($\leq n$).

Démonstration. Il suffit de montrer qu'un produit de deux réflexions est un produit de deux renversements.

En dimension 3, si σ_{a_1} et σ_{a_2} sont deux réflexions distinctes, alors les applications $r_i := -\sigma_{a_i}$ sont des renversements. On obtient donc le résultat souhaité puisque $r_1 r_2 = \sigma_{a_1}\sigma_{a_2}$.

Supposons maintenant $n \geq 3$. Soient σ_{a_1} et σ_{a_2} deux réflexions distinctes. Pour $i = 1$ ou 2, l'hyperplan $H_i := \langle a_i \rangle^\perp$ est fixe par σ_{a_i}. Ainsi l'espace vectoriel $H_1 \cap H_2 = \langle a_1, a_2 \rangle^\perp$ de dimension $n - 2$ est fixe par σ_{a_1} et σ_{a_2}. Choisissons un sous-espace vectoriel quelconque $G^\perp$ de $H_1 \cap H_2$ de dimension $n - 3$; de sorte que son orthogonal G contienne a_1 et a_2, et soit de dimension 3. Le sous-espace vectoriel $G^\perp$ est stable par $\sigma_{a_1}\sigma_{a_2}$, et son orthogonal G l'est donc aussi (puisque $\sigma_{a_1}\sigma_{a_2}$ est un automorphisme orthogonal). En recollant les automorphismes orthogonaux $-\sigma_{a_i} : G \to G$ et $\mathrm{id}_{G^\perp}$ de façon à obtenir un automorphisme orthogonal de $E = G \overset{\perp}{\oplus} G^\perp$, on obtient des renversement r_i vérifiant la propriété souhaitée. $\square$

3.3 Le cas de la dimension 2

Nous nous intéressons maintenant à la réduction des automorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ (ou E) en base orthonormée. Cette réduction peut se ramener à celle des automorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^2$. On détaille ainsi tout d'abord l'étude des automorphismes orthogonaux du plan euclidien. On présentera la réduction des automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien de dimension quelconque dans la leçon suivante.

On suppose dans cette section $\underline{\dim E = 2}$. La réduction des automorphismes orthogonaux montre que ceux de déterminant positif sont les *rotations* du plan. Cela nous amène à définir une notion d'angle. Cette notion caractérise les rotations du plan.

3.3.1 Étude des éléments de $O_2(\mathbb{R})$

Notation. Pour tout réel θ, on note

$$R(\theta) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Proposition 44.

1. *L'application*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & SO_2(\mathbb{R}) \\ \theta & \mapsto & R(\theta) \end{array} \right.$$

est bien définie et est un morphisme surjectif du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ *sur le groupe* $SO_2(\mathbb{R})$*, de noyau* $2\pi\mathbb{Z}$*. Elle induit donc un isomorphisme de* $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ *sur* $SO_2(\mathbb{R})$*.*
En particulier, $SO_2(\mathbb{R})$ *est un groupe abélien.*

2. *On a aussi un isomorphisme de* $\mathbb{U} \coloneqq \{z \; ; \; |z| = 1\}$ *sur* $SO_2(\mathbb{R})$ *en associant à tout élément* z *de* $\mathbb{U}$ *la matrice* $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix}$.

3. *D'autre part,* $O_2^-(\mathbb{R})$ *est constitué des matrices de la forme*

$$S(\theta) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \textit{pour un } \theta \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. 1. On vérifie aisément que $R(\theta) \in O_2(\mathbb{R})$ et est de déterminant égal à 1. Un calcul direct donne aussi $R(\theta) \cdot R(\theta') = R(\theta + \theta')$, ce qui nous assure que l'on a un morphisme de groupes. On obtient le noyau grâce à la 2π-périodicité des fonctions sinus et cosinus. La surjectivité vient des égalités $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$ et $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc = 1$.

2. L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ fournit l'isomorphisme de groupes entre $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\mathbb{U}$.
3. Il suffit de considérer les deux égalités du point 1. en remplaçant la valeur du déterminant par -1.

$\square$

Remarques. 1. Les éléments de $O_2^-(\mathbb{R})$ sont des réflexions (on peut soit utiliser le théorème 42, soit calculer le polynôme caractéristique de $S(\theta)$ et en déduire le fait qu'elle est semblable à $\mathrm{diag}(1, -1)$).

2. Le choix d'une base orthonormée permet d'identifier $SO(E)$ avec $SO_2(\mathbb{R})$. On peut montrer que cette identification ne dépend que de l'*orientation* de la base orthonormée considérée : on appelle *orientation* [1] le choix d'une base orthonormée (e_1, e_2) à action de $SO(E)$ près. Un changement d'orientation échange θ en $-\theta$.

1. La notion d'orientation est en fait définie de façon générale dans un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension quelconque. Elle correspond au choix d'une classe d'équivalence de bases (non nécessairement orthonormée) de l'espace vectoriel sous l'action des éléments de déterminant positif du groupe linéaire de l'espace. Explicitement, deux bases sont équivalentes si la matrice de passage de l'une à l'autre est de déterminant positif. Le choix d'une base fixe une classe d'équivalence donc fixe une orientation. Comme le déterminant d'une matrice de passage est positif ou négatif, il existe deux orientations possibles pour un espace.

Exercice.

Vérifier que l'isomorphisme ne dépend que de l'orientation et qu'un changement d'orientation fait bien l'échange proposé.

3.3.2 La notion d'angle

Il est tentant d'utiliser l'isomorphisme $SO_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{U} = \{e^{i\theta} ; \theta \in \mathbb{R}\}$ (ou $SO(E) \simeq \mathbb{U}$ lorsqu'une orientation est fixée) pour définir une notion d'*angle*. Nous allons le faire !

Définition 45.

- On appelle *demi-droite* une partie de E de la forme $\mathbb{R}_+ x := \{\lambda x ; \lambda \geq 0\}$ pour $x \in E \backslash \{0\}$. On note $\widetilde{\mathcal{D}}(E)$ l'ensemble des demi-droites et on définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\widetilde{\mathcal{D}}(E) \times \widetilde{\mathcal{D}}(E)$ par $(\Delta_1, \Delta_2) \mathcal{R} (\Delta_1', \Delta_2')$ s'il existe $u \in SO(E)$ tel que $u(\Delta_i) = \Delta_i'$ pour $i = 1, 2$;
- un *angle orienté de demi-droites* de E est un élément du quotient $\widetilde{\mathcal{A}} := \dfrac{\widetilde{\mathcal{D}}(E) \times \widetilde{\mathcal{D}}(E)}{\mathcal{R}}$. On note $\widehat{\Delta_1 \Delta_2}$ la classe de (Δ_1, Δ_2).

Remarque. L'*angle orienté de droites* se définit de la même manière.

Exercice.

Montrer que l'action de $SO(E)$ sur les $\widetilde{\mathcal{D}}(E)$ est libre et transitive.

Proposition 46.
Soit $\Delta_0 \in \widetilde{\mathcal{D}}(E)$. L'application $\theta : SO(E) \to \widetilde{\mathcal{A}}$, $u \mapsto \widehat{\Delta_0 u(\Delta_0)}$ est une bijection qui ne dépend pas du choix de Δ_0.

Démonstration.

- L'application θ est **injective** puisque l'action de $SO(E)$ sur les demi-droites est libre ;
- la **surjectivité** de l'application θ se démontre grâce à la transitivité de l'action de $SO(E)$ sur les demi-droites : soit $\Delta_1, \Delta_2 \in \widetilde{\mathcal{D}}(E)$, il existe $u \in SO(E)$ tel que $u(\Delta_1) = \Delta_2$ et il existe $v \in SO(E)$ tel que $v(\Delta_0) = \Delta_1$ donc $\widehat{\Delta_1 \Delta_2} = \widehat{v(\Delta_0) u(v(\Delta_0))} = \widehat{\Delta_0 u(\Delta_0)}$ (puisque $SO(E)$ est commutatif). Faire un dessin ;
- l'application θ ne dépend pas de Δ_0 puisque $SO(E)$ agit transitivement sur les demi-droites et $SO(E)$ est commutatif.

□

Remarque. Cette proposition permet d'associer de façon unique un angle orienté à un automorphisme orthogonal de determinant positif. Ces automorphismes de E sont donc appelés les *rotations planes* et, plus précisément, u est appelée une *rotation d'angle orienté $\theta(u)$*.

Définition 47.
Soit E un plan vectoriel **orienté** par une base orthonormée (e_1, e_2). Soit $\tilde{c} \in \widetilde{\mathcal{A}}$. On a $\tilde{c} = \widehat{\Delta_0 u(\Delta_0)}$ pour Δ_0 une demi-droite et $u \in SO(E)$ telle que $\mathrm{Mat}(u, (e_i)) = R(\theta)$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *mesure* de $\tilde{c}$ un tel θ. Les autres mesures sont les éléments de $\theta + 2\pi\mathbb{Z}$.

Remarques. – Dans un espace orienté, un automorphisme orthogonal de déterminant positif u est une *rotation de mesure d'angle θ*, avec θ une mesure de l'angle $\theta(u)$ si u est une rotation d'angle orienté $\theta(u)$ (on rappelle que la notion de rotation d'angle orienté $\theta(u)$ ne nécessite pas que E soit orienté, la mesure par contre le nécessite car on doit savoir dans quel sens on tourne) ;

– On appelle *bissectrice* d'un angle de demi-droites $\widehat{\Delta_1\Delta_2}$ toute demi-droite Δ telle que $\widehat{\Delta_1\Delta} = \widehat{\Delta\Delta_2}$ (il y en a deux) ;

– Même définitions avec des droites à la place des demi-droites. Dans ce cas, il n'y a qu'une seule bissectrice.

Définition 48.

Ici $\dim E \geq 2$ et E n'est pas nécessairement orienté.

1. On appelle *angle non orienté* de $\Delta = \mathbb{R}_+ x$ et $\Delta' = \mathbb{R}_+ x'$ le **nombre**

$$\overline{\Delta\Delta'} := \arccos\left(\frac{\varphi(x,\, x')}{q(x)^{\frac{1}{2}} q(x')^{\frac{1}{2}}}\right) \in [0,\, \pi].$$

2. On appelle *angle non orienté* de $D = \mathbb{R}x$ et $D' = \mathbb{R}x'$ le **nombre**

$$\overline{DD'} := \arccos\left(\frac{|\varphi(x,\, x')|}{q(x)^{\frac{1}{2}} q(x')^{\frac{1}{2}}}\right) \in \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right].$$

Exercice.

Relier les mesures d'angle d'un angle orienté de demi-droites à l'angle non orienté de demi-droites.

Questions de fin de leçon.

Lorsque l'on a un espace euclidien,

– combien y a-t-il de bases orthonormées ?
– qu'est-ce qu'un automorphisme orthogonal ? Pouvez-vous en donner plusieurs exemples ?
– quelles sont les briques élémentaires du groupe orthogonal ? Pour quelles raisons ?
– qu'est-ce qu'un angle ?

Leçon 4

Les endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

(de dimension finie)

Objectifs de la leçon

- connaître la réduction des automorphismes orthogonaux et les classifications qui en découlent en dimensions 2 et 3 ;
- connaître les endomorphismes remarquables en présence d'une forme quadratique (non dégénérée) et leurs réductions ;
- comprendre le passage d'un théorème spectral à un autre.

Réduire un endomorphisme u, c'est trouver une base dans laquelle sa matrice a une forme simple. Dans un espace euclidien (E, q), nos bases préférées sont les bases orthonormées. Nous allons donc chercher à réduire u dans une telle base. On dira qu'un endomorphisme est *remarquable*[1] s'il admet une réduction dans une *base orthonormée* (relativement à q).

Fixons une base orthonormée $\mathbf{B}$, la matrice de q dans cette base est $M = I_n$. Dans cette même base, la matrice de u n'est pas forcément simple et il va donc falloir effectuer un changement de base. Un changement de base transforme la matrice M de q par l'application $M \mapsto {}^tPMP$. Dans le cas où la matrice d'arrivée est aussi orthonormée, la matrice ${}^tPMP$ vaut aussi I_n et on a donc ${}^tPP = I_n$, ou encore $P^{-1} = {}^tP$. Cette dernière égalité va nous permettre dans la section 4.3.3 d'utiliser la réduction des endomorphismes remarquables pour en déduire une orthogonalisation simultanée de formes quadratiques.

Dans un espace quadratique non dégénéré, il est possible d'associer à un endomorphisme u son endomorphisme adjoint u^*. Cet endomorphisme dépend de la forme quadratique et il permet de définir la notion d'endomorphisme normal qui englobe les endomorphismes autoadjoints, antisymétriques, les automorphismes orthogonaux ou encore les similitudes. Une propriété remarquable des endomorphismes normaux est décrite dans le lemme 53 : si un sous-espace vectoriel est stable par un endomorphisme normal, il est aussi stable par son adjoint. Une conséquence importante de ce résultat est donnée dans le corollaire 54 : lorsqu'un endomorphisme normal stabilise un sous-espace vectoriel, il stabilise aussi son orthogonal.

1. Ce n'est pas une définition précise puisque nous n'avons pas précisé ce que l'on entend par "réduction".

Lorsque l'espace quadratique est euclidien, nous pouvons toujours trouver un sous-espace stable par un endomorphisme fixé qui sera de dimension 1 ou 2. À l'aide du corollaire 54, nous pouvons alors effectuer par récurrence sur la dimension la réduction des endomorphismes normaux et les caractériser.

Nous traitons en premier lieu et indépendamment le cas des automorphismes orthogonaux car nous souhaitons le mettre en valeur. Il découlera cependant aussi de l'étude générale des endomorphismes normaux qui viendra dans un deuxième temps. Nous finissons la leçon par le théorème spectral (théorème 62) qui permet, par exemple, de classifier les quadriques.

Nous continuons de désigner par (E, q) l'espace euclidien dans lequel nous travaillons et φ la forme bilinéaire symétrique associée à q (qui est un produit scalaire).

4.1 L'adjonction dans un espace euclidien

Nous définissons dans cette section la notion d'*adjoint* d'un endomorphisme u, qui comme son nom l'indique, aidera à l'étude de l'endomorphisme u. Nous présentons quelques-unes de ses propriétés.

4.1.1 L'adjoint d'un endomorphisme

Proposition 49.
L'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{B}(E \times E, \mathbb{R}) \\ u & \mapsto & [(x, y) \mapsto \varphi(x, u(y))] \end{array}\right.$$

est bien définie et est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. Fixons une base $\mathbf{B}$ de E. Nous avons alors, pour x et y dans E, de matrices de coordonnées respectives X et Y dans $\mathbf{B}$,

$$\varphi(x, u(y)) = {}^tXM_{\mathbf{B}}(\varphi)(M_{\mathbf{B}}(u)Y) = {}^tX(M_{\mathbf{B}}(\varphi)M_{\mathbf{B}}(u))Y.$$

Par suite, la traduction matricielle de l'application considérée est

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M_{\mathbf{B}}(\varphi)M, \end{array}\right.$$

qui est un isomorphisme car φ est non dégénérée. □

Définition 50.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. D'après la proposition précédente, la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \varphi(u(x), y)$ est représentée (de façon unique) par un endomorphisme qui est noté u^* et qui est appelé l'*adjoint* de u (relativement à φ).

Cet adjoint est caractérisé par la condition

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi(u(x), y) = \varphi(x, u^*(y)).$$

4.1.2 Endomorphismes remarquables

Compte tenu de la définition de l'adjoint, on trouve immédiatement que :

– la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \varphi(x, u(y))$ est symétrique si et seulement si $u^* = u$;

– la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \varphi(x, u(y))$ est antiymétrique si et seulement si $u^* = -u$.

Cela motive la moitié des définitions suivantes :

Définition 51.

On dit que l'endomorphisme u est :

– *symétrique* ou *autoadjoint* si $u^* = u$;

– *antisymétrique* si $u^* = -u$;

– *orthogonal* si $u^*u = uu^* = \mathrm{id}$;

– *normal* si $u^*u = uu^*$.

4.1.3 Propriétés de l'adjoint

On peut remarquer que, dans une base orthonormée $\mathbf{B}$, on a $M_{\mathbf{B}}(u^*) = {}^tM_{\mathbf{B}}(u)$.
Ainsi, en notant $U := M_{\mathbf{B}}(u)$, les égalités de la définition 51 donnent :

$${}^tU = U,\ {}^tU = -U,\ {}^tUU = U{}^tU = I_n \text{ et } {}^tUU = U{}^tU.$$

Il découle immédiatement les propriétés suivantes : $(u+v)^* = u^* + v^*$, $(\lambda u)^* = \lambda u^*$, $(u^*)^* = u$, $(uv)^* = v^*u^*$, $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$, $\operatorname{rg} u^* = \operatorname{rg} u$ et $\det u^* = \det u$.
Dans une base quelconque $\mathbf{B}'$, on a $M_{\mathbf{B}'}(u^*) = M_{\mathbf{B}'}(\varphi)^{-1}({}^tM_{\mathbf{B}'}(u))M_{\mathbf{B}'}(\varphi)$.

Lemme 52.

Si le sous-espace F est stable par un endomorphisme (quelconque) u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la définition de u^* qui nous dit que pour tous $x, y \in E$, on a $\varphi(u(x), y) = \varphi(x, u^*(y))$. □

Lemme 53.

Soit u un endomorphisme normal. Un sous-espace $F \subset E$ est stable par u si et seulement s'il est stable par u^*.

Démonstration. Si $\dim F = 0$ ou n, il n'y a pas de difficulté. Supposons que $1 \le p = \dim F < n$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F que l'on complète en une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. On a $\mathrm{Mat}(u, (e_i)) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,\,p} & C \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}(u^*, (e_i)) = \begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ {}^tB & {}^tC \end{pmatrix}$. De $uu^* = u^*u$, on tire $\begin{pmatrix} A\,{}^tA + B\,{}^tB & B\,{}^tC \\ C\,{}^tB & C\,{}^tC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tAA & {}^tAB \\ {}^tBA & {}^tBB + {}^tCC \end{pmatrix}$, donc $tr(B^tB) = 0$, puis $B = 0$ et donc le fait que F est stable par u^*. □

Corollaire 54.

Soit u un endomorphisme normal. Un sous-espace $F \subset E$ est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u.

Démonstration. D'après le lemme 52, le sous-espace vectoriel F est stable par u^*. D'après le lemme 53, son orthogonal $F^\perp$ est stable par $(u^*)^* = u$. $\square$

Remarque. En particulier, les deux résultats précédents sont valables pour u symétrique, antisymétrique ou orthogonal.

4.2 Réduction des éléments de $O(E)$

Nous démontrons la réduction des automorphismes orthogonaux et nous donnons la classification en dimensions 2 et 3.

4.2.1 Le cas général

Lemme 55.

> *Soit u un endomorphisme (quelconque) de E ($\mathbb{R}$-espace vectoriel). Alors il existe un sous-espace de dimension 1 ou 2 stable par u.*

Démonstration. Si u admet un vecteur propre non nul, alors il engendre un sous-espace stable et c'est fini.
Sinon, soit $\mu_u(X)$ le polynôme minimal de u. Il se décompose sur $\mathbb{R}$ en produit de polynômes irréductibles de degré 2. Soit $P_1(X)$ l'un d'entre eux, de sorte que $\mu_u(X) = P_1(X)Q(X)$. On a $Q(u) \neq 0$ car $\deg Q < \deg \mu_u$, donc $\ker P_1(u) \neq \{0\}$ et il existe $x_0 \neq 0$ tel que $P_1(u)(x_0) = 0$. Finalement, le plan $\langle x_0,\, u(x_0)\rangle$ est stable par u et on a le résultat. $\square$

Théorème 56.

Soit $u \in O(q)$. L'espace E est une somme directe orthogonale : $E = V \overset{\perp}{\oplus} W \overset{\perp}{\oplus} P_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_r$, où r est un entier ≥ 0, V, W et les P_i sont des sous-espaces stables par u, avec $u_{|V} = \mathrm{id}_V$, $u_{|W} = -\mathrm{id}_W$, $\dim P_i = 2$ et $u_{|P_i}$ est une rotation plane, distinctes de $\pm\mathrm{id}_{P_i}$.

Matriciellement, dans une base orthonormée, u a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & 0 \\ & & \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & & \\ & 0 & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

où p et q sont les dimensions de V et W respectivement, $\theta_i \in [0,\, 2\pi[$ et $\theta_i \neq 0,\, \pi$.

Remarques.
- On peut supposer $\theta_1 \leq \cdots \leq \theta_r$ quitte à réordonner la base orthonormée ;
- on peut se ramener à $\theta_i < \pi$ quitte à changer la base correspondante $(e_i,\, f_i)$ en $(e_i,\, -f_i)$.

Démonstration. On procède par récurrence sur n.

1. Pour $n = 1$, c'est clair. Pour $n = 2$, on a vu que
   - si $\det u = -1$, alors u est une réflexion et, dans ce cas il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
   - si $\det u = 1$, alors $\mathrm{Mat}(u,\, BON) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

2. On suppose maintenant $n \geq 3$. D'après le lemme 55, il existe un sous-espace F de E, non trivial (de dimension 1 ou 2), et stable par u. Le sous-espace $F^\perp$ est aussi stable par u (d'après le point 4 de la remarque qui suit la définition 36 ou d'après le corollaire 54) et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à F et $F^\perp$.

□

Remarques. – Les espaces V et W sont bien déterminés par u : $V = E_1$ et $W = E_{-1}$, par contre, les P_i peuvent ne pas l'être si les valeurs propres complexes sont de multiplicité ≥ 2 ;

– si n est impair, alors V ou W est non nul ; si $\det u = -1$, W est non nul.

Corollaire 57.

Le groupe $O_n(\mathbb{R})$, muni de la topologie induite par celle de $M_n(\mathbb{R})$, a deux composantes connexes : $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$. De plus, $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont compacts.

Démonstration. – Montrons que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Soit $M \in SO_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème 56, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} I_p & & & 0 \\ & -I_q & & \\ & & A_1 & \\ 0 & & & A_r \end{pmatrix},$$

avec $A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$. Comme $\det M = 1$, on a $q = 2q'$ et $-I_q = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{q'} \end{pmatrix}$, avec $B_i = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$. En définissant $A_i(t) := \begin{pmatrix} \cos\theta_i t & -\sin\theta_i t \\ \sin\theta_i t & \cos\theta_i t \end{pmatrix}$ et $B_i(t)$ de façon similaire, on obtient

$$M(t) = P \begin{pmatrix} I_p & & & & & & \\ & B_1(t) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & B_{q'}(t) & & & \\ & & & & A_1(t) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & A_r(t) \end{pmatrix} P^{-1},$$

qui définit un chemin $[0,\,1] \to SO_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto M(t)$ tel que $M(0) = I_n$ et $M(1) = M$;

– soit $M \in O_n(\mathbb{R}) \backslash SO_n(\mathbb{R})$. On a $MO_n^-(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R})$, donc $O_n^-(\mathbb{R})$ est connexe par arcs ;

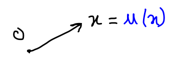
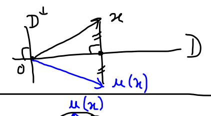
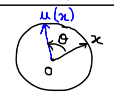
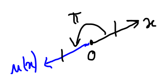
– l'application $g : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tMM$ est continue donc $g^{-1}(\{I_n\})$ est fermé ($\{I_n\}$ est un singleton donc fermé). En regardant les diagonales de ${}^tMM = I_n$, on trouve que $\sum_{j=1}^{n} {m_{i,j}}^2 = 1$ pour tout $i \in [\![1,\,n]\!]$. Ainsi, les coefficients de M sont bornés. Il s'ensuit que $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné, c'est donc un compact. À l'aide du déterminant, on voit que $SO_n(\mathbb{R})$ est un fermé dans $O_n(\mathbb{R})$, il est donc compact.

□

Remarque. L'étude de la décomposition polaire et la panoplie d'applications qui en découlent seront présentées et étudiées dans la leçon suivante.

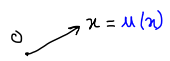
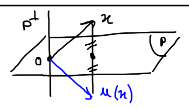
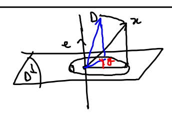
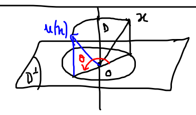
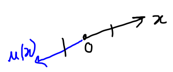
4.2.2 Classification des automorphismes orthogonaux en dimension 2 (E orienté)

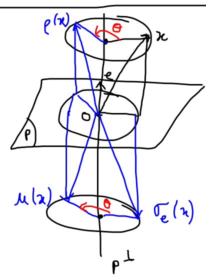
Suite à l'étude effectuée dans la section 3.3, on obtient le tableau suivant qui donne les différentes isométries possibles en dimension 2 :

$E_1 = \ker(u-id)$ $E_1 = \ker(u+id)$	u	matrice dans une <u>bonne</u> BON, χ_u, m_u	invariants ou éléments caractéristiques	dessin
$E_1 = E$ $E_{-1} = \{0\}$	$u = id$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $(X-1)^2$, $X-1$		
$E_1 = D$ droite $E_{-1} = D^\perp$	u est une symétrie orthogonale de droite D	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $(X-1)(X+1)$, $(X-1)(X+1)$	la droite D caractérise la symétrie orth. de droite D	
$E_1 = \{0\}$ $E_{-1} = \{0\}$	u est une rotation de mesure d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$	$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$, $X^2-2\cos\theta X+1$, $X^2-2\cos\theta X+1$	le nombre $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ mod $2\pi\mathbb{Z}$ caractérise la rotation u de mesure d'angle θ	
$E_1 = \{0\}$ $E_{-1} = E$	u est l'homothétie de rapport -1 ; c'est aussi la rotation de mesure d'angle π	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $(X+1)^2$, $X+1$	le rapport -1 caractérise l'homothétie	

4.2.3 Classification des automorphismes orthogonaux en dimension 3 (E orienté)

Suite à l'étude effectuée dans la section 3.3, on obtient le tableau suivant qui donne les différentes isométries possibles en dimension 3 :

$E_1 = \ker(u-id)$ $E_1 = \ker(u+id)$	u	matrice dans une <u>bonne</u> BON, χ_u, m_u	invariants ou éléments caractéristiques	dessin
$E_1 = E$ $E_{-1} = \{0\}$	$u = id$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $(X-1)^3$, $X-1$		
$E_1 = P$ $E_{-1} = P^\perp$	u est la symétrie orthogonale d'hyperplan P	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $(X-1)^2(X+1)$, $(X-1)(X+1)$	P caractérise la symétrie orthogonale d'hyperplan P	
$E_1 = D = \langle e \rangle$ $E_{-1} = \{0\}$ avec $\|e\|=1$ définit l'orientation de D^+	u est la rotation d'axe orienté D^+ et de mesure d'angle $\theta \in]0,\pi[$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$, $(X-1)(X^2-2\cos\theta X+1)$, $(X-1)(X^2-2\cos\theta X+1)$	le couple unique (e,θ) caractérise la rotation u	
$E_1 = D$ $E_{-1} = D^\perp$	u est le demi-tour (ou renversement) d'axe D	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $(X-1)(X+1)^2$, $(X-1)(X+1)$	la droite caractérise le demi-tour	
$E_1 = \{0\}$ $E_{-1} = E$	u est l'homothétie de rapport -1	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $(X+1)^3$, $(X+1)$	le rapport -1 caractérise l'homothétie u	

$E_1 = \ker(u-id)$ $E_1 = \ker(u+id)$	u	matrice dans une <u>bonne</u> BON, χ_u, m_u	invariants ou éléments caractéristiques	dessin
$E_1 = \{0\}$ $E_{-1} = P^\perp = \mathbb{R}e$ $\lVert e \rVert = 1$ e définit l'orientation	$u = \rho\sigma_e = \sigma_e\rho$ est la symétrie-rotation où ρ est la rotation d'axe orienté $\mathbb{R}e$ et de mesure d'angle $\theta \in]0, \pi[$ et σ_e est la symétrie orthogonale de plan $P = (\mathbb{R}e)^\perp$.	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(X+1)(X^2 - 2\cos\theta X + 1)$, $(X+1)(X^2 - 2\cos\theta X + 1)$	le couple (e, θ) caractérise la symétrie-rotation u	

4.3 Étude des autres endomorphismes remarquables

Nous définissons la notion de similitude. Elle permet de décrire la réduction les endomorphismes normaux en dimension 2, puis en dimension quelconque.

4.3.1 Réduction des endomorphismes normaux en dimension 2

La notion de similitude a été aperçue dans les sections précédentes de façon cachée. C'est un exemple d'endomorphisme qui préserve les angles mais pas nécessairement les longueurs. L'appellation provient de la notion analogue en géométrie affine euclidienne puisqu'une similitude envoie une forme (comme un triangle) sur une forme semblable.

Définition 58.

On appelle *similitude* de rapport $\mu > 0$ tout élément $u \in GL(E)$ tel que $\forall x \in E$, $q(u(x)) = \mu^2 q(x)$. L'ensemble des similitudes est un sous-groupe de $GL(E)$, noté $GO(E)$.

Remarques.
- Une similitude est la composition d'une homothétie de rapport positif et d'un automorphisme orthogonal.
- On dit que u est une similitude *directe* (resp. *indirecte*) si $\det u > 0$ (resp. < 0).

Nous décrivons maintenant les endomorphismes normaux en dimension 2.

Proposition 59.
Les endomorphismes normaux u de E sont :

1. *les similitudes directes autres que les homothéties si u n'a pas de valeur propre ;*
2. *les endomorphismes symétriques si u admet au moins une valeur propre. Dans ce cas, il existe une base orthonormée de vecteurs propres.*

Démonstration. Fixons une base orthonormée B et considérons $U = \mathrm{Mat}(u, B) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ca+db & c^2+d^2 \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}{}^t\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ba+dc & b^2+d^2 \end{pmatrix},$$

d'où $b = c$, ou $b = -c \neq 0$ et $a = d$.

- Si $b = c$, alors u est symétrique et $\chi_u(X) = X^2 - (a+d)X + ad - b^2$ donc $\Delta = (a+d)^2 - 4ad + 4b^2 = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$ et χ_u est scindé à racines simples ou $u = a\mathrm{id}$ et il existe une base de vecteurs propres orthogonaux (dans le cas où il y a deux valeurs propres, on peut utiliser le fait que u est symétrique) ;

– sinon, on a $U = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\sin\theta \neq 0 \mod 2\pi$ et $\mu > 0$. L'endomorphisme u est alors une similitude directe qui n'est pas une homothétie et il n'a pas de valeur propre réelle.

□

4.3.2 Réduction des endomorphismes remarquables en toute dimension

On se base sur les résultats obtenus en dimension 2 pour donner la réduction des endomorphismes normaux en dimension quelconque. Nous appliquons ensuite les résultats obtenus à la réduction aux endomorphismes symétriques, antisymétriques et aux automorphismes orthogonaux.

Théorème 60.
Soit u un endomorphisme normal de E. Il existe $F_1, \dots, F_m$ de dimension 1 ou 2 tels que

1. *l'espace E soit la somme orthogonale $E = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_m$;*
2. *les espaces F_i sont stables par u avec $u_{|F_i} = \lambda_i \mathrm{id}_{F_i}$ si $\dim F_i = 1$ et $u_{|F_i}$ est une similitude directe autre qu'une homothétie si $\dim F_i = 2$.*

Matriciellement, dans une base orthonormée bien choisie, on a

$$\mathrm{Mat}(u,\, BON) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_p & & & \\ & & & \mu_1 A_{\theta_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_q A_{\theta_q} \end{pmatrix}, \text{ avec } A_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial et le cas $n = 2$ a déjà été traité à la proposition 59. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$ et considérons E de dimension n. D'après le lemme 55 et le corollaire 54, il existe un sous-espace F_1, avec $\dim F_1 = 1$ ou 2, stable par u et tel que $F_1^{\perp}$ est stable par u. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à F_1 et $F_1^{\perp}$. □

Théorème 61.
Soit u un endomorphisme de E. Il existe une base orthonormée de E telle que la matrice de u dans cette base est :

1. $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *si et seulement si u est symétrique ;*
2. $\mathrm{diag}(0, \dots, 0, \alpha_1 J, \dots, \alpha_q J)$*, avec $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\alpha_i \neq 0$, si et seulement si u est antisymétrique ;*
3. $\mathrm{diag}(I_p, -I_q, A_{\theta_1}, \dots, A_{\theta_r})$ *si et seulement si u est un automorphisme orthogonal.*

Remarque. Les trois cas ne sont pas disjoints.

Démonstration. On applique le théorème précédent. □

4.3.3 Lien avec la congruence et orthogonalisation simultanée

Nous avons décrit dans les sections précédentes la réduction des endomorphismes normaux dans des bases orthonormées. La réduction correspond à la recherche d'une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme u admet une forme "simple". Cela revient à trouver une matrice "simple" dans la classe de similitude de $M_{\mathbf{B}}(u)$, pour une base $\mathbf{B}$ quelconque fixée. Comme la réduction se fait ici en base orthonormée, on se restreint en fait à la $O_n(\mathbb{R})$-classe de similitude de $M_{\mathbf{B}}(u)$, pour une base orthonormée $\mathbf{B}$ quelconque fixée. Nous pouvons alors faire un lien avec les classes de congruence, ce qui nous amène au théorème spectral connu sous le nom d'orthogonalisation simultanée.

Nous commençons par le théorème spectral pour les endomorphismes qui est un sous-cas du théorème 61.

Théorème 62.
Les endomorphismes symétriques (d'un espace euclidien) sont les endomorphismes diagonalisables en base orthonormée.

Nous insistons sur l'explication donnée en introduction avec le lemme suivant. Il permet de passer du monde des endomorphismes au monde des formes quadratiques.

Lemme 63.
Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont $O_n(\mathbb{R})$-congruentes si et seulement si elles sont $O_n(\mathbb{R})$-semblables.

Démonstration. Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$. Comme ${}^tP = P^{-1}$, les relations $A' = PA{}^tP$ et $A' = PAP^{-1}$ sont équivalentes. □

Nous pouvons alors donner le théorème spectral pour les formes quadratiques.

Théorème 64 *(Orthogonalisation simultanée).*
Si q' est une forme quadratique sur l'espace euclidien (E, q), alors il existe une base orthonormée pour q et orthogonale pour q'.

Démonstration. Soit $\mathbf{B}$ une base orthonormée pour q (théorème 24). La matrice $S := M_{\mathbf{B}}(q')$ est symétrique (on n'utilise pas le fait que $\mathbf{B}$ soit orthonormée). Il existe un endomorphisme u tel que $M_{\mathbf{B}}(u) = S$. Comme la base $\mathbf{B}$ est orthonormée pour q, l'endomorphisme u est symétrique relativement à q. D'après le théorème 62, il existe une base orthonormée $\mathbf{B}'$ telle que

$$P^{-1}SP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

pour P la matrice de passage de la base $\mathbf{B}$ à la base $\mathbf{B}'$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Comme P est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée, elle vérifie $P^{-1} = {}^tP$ et on a (lemme 63)

$${}^tPM_{\mathbf{B}}(q')P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

La base $\mathbf{B}'$ est donc la base recherchée. □

Questions de fin de leçon.
Dans un espace euclidien,
- pouvez-vous décrire les automorphismes orthogonaux ?
- qu'est-ce qu'un endomorphisme remarquable ?
- quelle propriété des endomorphismes normaux permet d'effectuer leur réduction par récurrence ?

Leçon 5

Les espaces hermitiens

Objectifs de la leçon

- connaître des exemples d'automorphismes unitaires ;
- connaître la diagonalisation des endomorphismes remarquables d'un espace hermitien ;
- comprendre la décomposition polaire et ses applications ;
- comprendre la décomposition en valeurs singulières.

Nous traitons maintenant le cas d'un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes. Pour que l'étude soit similaire au cas réel, on ne considère pas les formes symétriques mais plutôt les formes hermitiennes [1]. Les espaces munis d'une telle forme sont donc appelés espaces hermitiens.

Après quelques définitions, nous donnons la réduction des automorphismes hermitiens et autres endomorphismes remarquables dans une base orthonormée bien choisie. On conclut par deux décompositions matricielles : la décomposition polaire et la décomposition en valeurs singulières.

Pour la culture : l'analogue complexe du groupe orthogonal, appelé le groupe unitaire, joue un rôle important en physique des particules. Plus précisément, ce sont les groupes $U(1)$, $SU(2)$ et $SU(3)$ qui sont utilisés. La décomposition en valeurs singulières a de nombreuses applications, à la fois théorique (calcul de l'image, du rang, du noyau, du pseudo-inverse d'une matrice, ...) et pratique (traitement d'image, des langues, du signal, sciences des données, ...).

Dans cette leçon, à l'exception de la section 5.2.2, l'espace E est toujours un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.

5.1 Le groupe unitaire

On présente les formes hermitiennes sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Comme les formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, elles sont classifiées par leur signature et on appelle espace hermitien le cas où la forme hermitienne est définie positive. Les automorphismes hermitiens sont ceux qui préservent la forme quadratique hermitienne (appelé aussi produit scalaire) et ils forment le groupe unitaire. Les espaces hermitiens s'étudient alors de façon analogue aux espaces euclidiens et nous pouvons décrire la réduction des endomorphismes normaux en base orthonormée.

1. Les formes symétriques et hermitiennes entrent dans le formalisme des formes sesquilinéaires que nous ne détaillerons pas ici. Les seules formes sesquilinéaires dans $\mathbb{R}$ sont les formes bilinéaires symétriques, et dans $\mathbb{C}$, il n'y a que deux options qui sont les formes bilinéaires symétriques et les formes hermitiennes.

5.1.1 Généralités

Définition 65.

On appelle *forme hermitienne* sur E ($\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie) toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ linéaire à gauche telle que $\varphi(y,\, x) = \overline{\varphi(x,\, y)}$, et donc telle que $\varphi(x,\, \lambda y) = \overline{\lambda}\varphi(x,\, y)$. On note q la *forme quadratique hermitienne* associée. On a

$$\varphi(x,\, y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right) + \frac{i}{4}\left(q(x+iy) - q(x-iy)\right).$$

Matriciellement, $M = \mathrm{Mat}(\varphi,\, (e_i))$, où (e_i) est une base, vérifie ${}^t\overline{M} = M$ et $\varphi(x,\, y) = {}^tXM\overline{Y}$, avec X et Y les vecteurs coordonnées de x et de y dans la base (e_i).

Définition 66.

On appelle *automorphisme unitaire* (relativement à φ) tout automorphisme u de E tel que $\varphi(u(x),\, u(y)) = \varphi(x,\, y)$ pour tous $x,\, y \in E$ (on remarque aisément que les égalités $\varphi(u(e_i),\, u(e_j)) = \varphi(e_i,\, e_j)$ pour tous i, j suffisent). L'ensemble des automorphismes unitaires forme un sous-groupe appelé *groupe unitaire* et noté $U(\varphi)$ ou $U(q)$.

Matriciellement, ${}^tUM\overline{U} = M$ où $U = \mathrm{Mat}(u,\, (e_i))$ et $M = \mathrm{Mat}(\varphi,\, (e_i))$.

Remarques.
- On définit la notion de base orthonormée de façon similaire au cas réel. Lorsque (e_i) est une base orthonormée, on a ${}^tU\overline{U} = I_n$ (ou encore ${}^t\overline{U}U = I_n$) ;
- pour tout automorphisme unitaire u, on a $|\det u| = 1$.

On appelle *groupe spécial unitaire* le sous-groupe $SU(\varphi) := \{u \in U(\varphi) \mid \det u = 1\}$ de $U(\varphi)$. La loi d'inertie de Sylvester pour les formes hermitiennes nous assure qu'elles sont classifiées par leurs signature : $(r,\, s)$. On suppose que φ est non dégénérée, c'est-à-dire que $r + s = n$ et on note $I_{r,\,s} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$ la forme quadratique hermitienne associée. Ainsi, on note $U_{r,\,s}(\mathbb{C}) := \{U \in GL_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{U}I_{r,\,s}U = I_{r,\,s}\}$, $SU_{r,\,s}(\mathbb{C}) := \{U \in U_{r,\,s}(\mathbb{C}) \mid \det U = 1\}$, $U_n(\mathbb{C}) := U_{n,\,0}(\mathbb{C})$ et $SU_n(\mathbb{C}) := SU_{n,\,0}(\mathbb{C})$.

Remarque. $U_{r,\,s}(\mathbb{C}) = U_{s,\,r}(\mathbb{C})$.

Définition 67.

On appelle *espace hermitien* un couple $(E,\, q)$ avec E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et q hermitienne définie positive (*i.e.* $q(x) > 0$ pour tout $x \in E$ non nul).

Exercice.
Une forme hermitienne $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ est à valeurs complexes. Quel est donc le sens de $q(x) > 0$?

Pour la suite, $(E,\, q)$ est un espace hermitien (sauf mention explicite du contraire).

Comme dans le cas réel, l'inégalité de Cauchy–Schwarz est vérifiée et $x \mapsto q(x)^{\frac{1}{2}}$ est une *norme*.

Exemple (d'automorphisme unitaire). Soit $a \in E\backslash\{0\}$ (donc non isotrope) et $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $|\xi| = 1$. On note $\sigma_{a,\,\xi}$ l'automorphisme $E \to E$, $x \mapsto x + (\xi - 1)\frac{\varphi(x,\, a)}{q(a)}a$. C'est un automorphisme unitaire appelé *quasi-symétrie* (si $\xi \neq 1$).
En effet, si (e_i) est une base orthonormée telle que $e_1 = \frac{a}{q(a)}$, alors $\sigma_{a,\,\xi}(e_1) = \xi e_1$ et $\sigma_{a,\,\xi}(e_i) = e_i$ pour $i \geq 2$. On a alors $\det u = \xi$. En particulier, on a $\sigma_{a,\,1} = \mathrm{id}_E$ et $\sigma_{a,\,-1} = \sigma_a$ s'écrit comme la symétrie orthogonale d'hyperplan $a^{\perp}$.

5.1.2 Étude des éléments de $U_n(\mathbb{C})$

On décrit d'abord la réduction des automorphismes unitaires en base orthonormée pour les mettre en valeur. On en déduit des générateurs du groupe unitaire et du groupe spécial unitaire.

On suppose ici que $E = \mathbb{C}^n$ et que q est hermitienne définie positive.

Théorème 68.
Soit $u \in U(q)$. L'espace E est somme directe orthogonale :

$$E = \ker(u - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} \ker(u - \lambda_r \mathrm{id}_E),$$

où les λ_i, qui sont les valeurs propres distinctes de u, sont de module égal à 1.

Démonstration. L'endomorphisme u admet un vecteur propre unitaire e_1 associé à la valeur propre λ_1. Ainsi $\mathbb{C}e_1$ est stable par u et il en est donc de même pour $(\mathbb{C}e_1)^\perp$ (puisque les automorphismes unitaires envoient sous-espaces vectoriels orthogonaux sur sous-espaces vectoriels orthogonaux). Par récurrence sur la dimension, on obtient une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres de u. Comme $1 = q(e_i) = q(u(e_i)) = |\lambda_i|^2 q(e_i) = |\lambda_i|^2$, on obtient que $|\lambda_i| = 1$. □

Remarque. Ainsi, les automorphismes unitaires sont diagonalisables en base orthonormée.

Matriciellement, dans une base orthonormée convenable, u a pour matrice $\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$, avec $\theta_i \in \mathbb{R}$ pour tout i.

Définition 69.
On appelle *rotation unitaire plane* un élément $v \in SO(q)$ s'il existe un plan P tel que $v(P) = P$ et $v_{|P^\perp} = \mathrm{id}_{P^\perp}$.

Exercice.

Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de rotation v vaut $\begin{pmatrix} \xi & 0 & \\ 0 & \xi^{-1} & \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix}$, avec $\xi^{-1} = \bar{\xi}$.

Une conséquence du théorème précédent est le théorème suivant :

Théorème 70.
1. *Soit $u \in U(q)$. Alors u se factorise en produit de quasi-symétries qui commutent entre elles : $u = \sigma_1 \cdots \sigma_p$, où σ_i est une quasi-symétrie et $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$. De plus, si $d = \dim\ker(u - \mathrm{id}_E)$, on peut choisir $p = n - d$ et ce nombre est minimal ;*
2. *Si $n \geq 2$ et $u \in SU(q)$, alors u est un produit de p rotations unitaires planes avec $p \leq n-1$. Plus précisément, on peut choisir $p \leq n - 1 - d$.*

Démonstration. 1. Pour tout $\lambda_i \neq 1$, on fixe une base orthonormale $(e_1^i, \ldots, e_{j_i}^i)$ de $E_{\lambda_i}(u)$. On choisit $\sigma_{j_1+\cdots+j_{i-1}+j} := \sigma_{e_j^i, \lambda_i}$. On obtient alors la décomposition souhaitée avec $p = n - d$. Si $u = \sigma_1 \cdots \sigma_{\tilde{p}}$, alors $\cap_{i=1}^{\tilde{p}} E_1(\sigma_i) \subset E_1(u)$ donc $d \geq n - \tilde{p}$ et $n - d$ est minimal ;

2. On démontre le résultat par récurrence. Si $n = 2$, alors u est nécessairement une rotation (par définition). On suppose maintenant le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$ et on suppose que E est de dimension n. Si $u \neq \mathrm{id}$, quitte à ré-indexer les λ_i, on peut supposer $\lambda_1 \neq 1$. On définit la rotation w par $w(e_1) = {\lambda_1}^{-1} e_1 = \bar{\lambda}_1 e_1$, $w(e_2) = \lambda_1 e_2$ et $w(e_i) = e_i$ si $i \geq 3$ (on a pris (e_i) une base orthonormée telle que $e_1 \in E_{\lambda_1}(u)$ et $e_2 \notin E_1(u)$, possible car $u \in SU(q)$). On a alors $wu(e_1) = e_1$ et $\dim E_1(wu) < \dim E_1(u)$. On conclut grâce à l'hypothèse de récurrence.

□

Remarque. Soient E hermitien de dimension 4 et $u \in SO(E)$ dont la matrice dans la base orthonormée (e_1, e_2, e_3, e_4) est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\xi, \xi^{-1}, \xi, \xi^{-1})$ avec $\xi \neq \pm 1$. Alors $\ker(u - \mathrm{id}_E) = \{0\}$ et u est un produit de deux rotations unitaires planes $(2 < 3 = 4 - 1 - 0)$. Le nombre $n - 1 - d$ n'est donc pas minimal.

5.1.3 Autres endomorphismes remarquables d'un espace hermitien

On s'attèle maintenant à la réduction plus générale des endomorphismes normaux, que l'on définit comme dans le cas euclidien.

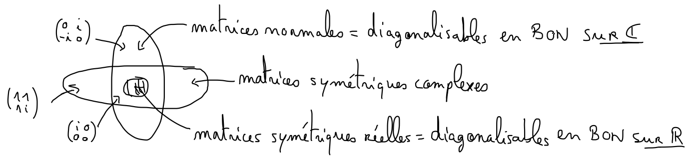
Théorème 71.
Un endomorphisme u est normal si et seulement s'il est diagonalisable en base orthonormée.

Démonstration. Soit e_1 unitaire, vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. Comme dans le cas réel, on a que $\mathbb{C}e_1$ est stable par u^* (lemme 53) puis que $(\mathbb{C}e_1)^\perp$ est stable par u (lemme 52). On conclut alors à l'aide d'une récurrence sur la dimension de E. De plus, si u est diagonalisable en base orthonormée, il est clair que u est normal. □

Corollaire 72.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est

- $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout i si, et seulement si, u est* autoadjoint *(on dit aussi* hermitien, i.e. ${}^t\overline{U} = U$ *en base orthonormée) ;*
- $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *avec $\lambda_i \in i\mathbb{R}$ pour tout i si, et seulement si, u est* antihermitien *(*i.e. ${}^t\overline{U} = -U$ *en base orthonormée).*

On a le schéma suivant :



5.2 La décomposition polaire

La décomposition polaire pour $GL_n(\mathbb{C})$ dans le cas $n = 1$ correspond à la décomposition polaire des nombres complexes non nuls : l'application

$$\begin{array}{ccc}]0, +\infty[\times S^1 & \to & \mathbb{C}^* \\ (\rho, e^{i\theta}) & \mapsto & \rho e^{i\theta} \end{array}$$

est un homéomorphisme. On traite ici le cas de la dimension quelconque (finie) sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

5.2.1 Le cas hermitien

Théorème 73 *(Décomposition polaire).*
On note HDP_n l'ensemble des matrices hermitiennes définies positives. L'application

$$U_n(\mathbb{C}) \times HDP_n \to GL_n(\mathbb{C}), \ (U, H) \mapsto UH$$

est un homéomorphisme.

Démonstration.

- **Existence de la décomposition (surjectivité) :** si $M = UH$, on a ${}^t\overline{M}M = H^2$. La matrice ${}^t\overline{M}M$ est ainsi hermitienne, définie positive ($M \in GL_n(\mathbb{C})$), et donc diagonalisable dans une base orthonormée : il existe $U_1 \in U_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^t\overline{M}M = U_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} {U_1}^{-1}$, avec les $\lambda_i > 0$. On définit $H := U_1 \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {U_1}^{-1}$. La matrice H est hermitienne, définie positive et $U := MH^{-1} \in U_n(\mathbb{C})$ (car ${}^t\overline{U}U = I_n$) ;
- **unicité (injectivité) :** elle résulte de l'unicité de la racine carrée. Soit P un polynôme tel que $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i (des polynômes d'interpolation de Lagrange par exemple). On a alors $P({}^t\overline{M}M) = H$. Soit $H_1 \in HDP_n$ telle que ${}^t\overline{M}M = {H_1}^2$. Ainsi, H_1 commute avec ${}^t\overline{M}M$, puis avec H (qui est un polynôme en ${}^t\overline{M}M$). Les matrices H et H_1 sont diagonalisables (car hermitiennes) dans une même base (car elles commutent). Leurs valeurs propres sont positives, de carrés identiques, donc égales ;
- **continuité :**
  - ∗ l'application $(U, H) \mapsto UH$ est polynomiale donc continue ;
  - ∗ montrons la continuité séquentielle de l'application $M \mapsto (U, H)$ (on est dans un espace métrique) : soit $(M_p) = (U_p H_p)$ qui converge vers $M = UH$. Nous devons montrer que $U_p \to U$ et $H_p \to H$. Soit U' une valeur d'adhérence de la suite (U_p), limite de la sous-suite (U_{p_k}) ($U_n(\mathbb{C})$ est compact). Alors $H_{p_k} = {U_{p_k}}^{-1} M_{p_k}$ converge vers $U'^{-1}M = H' \in HDP_n$ (puisque $H_{p_k} \in HDP_n$ et $U'^{-1}M \in GL_n(\mathbb{C})$). On a alors $M = UH = U'H'$ et l'unicité de la décomposition polaire donne $U' = U$ et $H' = H$. Dans le compact $U_n(\mathbb{C})$, la suite (U_p) n'a donc qu'une seule valeur d'adhérence : elle converge vers U et (H_p) converge vers H.

□

Remarques.

- Il est possible de décrire une décomposition polaire pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, mais il n'y a plus unicité (comme dans le cas $n = 1$: la matrice U n'est plus unique) ;
- il existe aussi la décomposition polaire $(H, U) \mapsto HU$.

Application à la structure des groupes classiques
On peut démontrer un homéomorphisme (voir [D. Serre, *Les matrices*]) :

$$U_{r,\,s}(\mathbb{C}) \overset{\text{homéo}}{\sim} U_r(\mathbb{C}) \times U_s(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{2rs}.$$

5.2.2 Retour sur le cas euclidien

Les résultats analogues dans le cas euclidien sont aussi vérifiés. On se permet même de citer quelques résultats supplémentaires.

Théorème 74 *(Décomposition polaire).*
On note SDP_n est l'ensemble des matrices (réelles) symétriques définies positives. L'application $O_n(\mathbb{R}) \times SDP_n \to GL_n(\mathbb{R})$, $(O, S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme.

Application (immédiate)
Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice.
Démontrer cette application (valable aussi dans le cas hermitien).

Remarque. On peut démontrer que tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal. Il y a plusieurs méthodes pour démontrer ce résultat qui en font autant de développements (ellipsoïde de Löwner ou théorème du point fixe [Alessandrini], mesure de Haar).

Application à la structure des groupes classiques
On a l'homéomorphisme $O_{r,s}(\mathbb{R}) \overset{\text{homéo}}{\sim} O_r(\mathbb{R}) \times O_s(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{rs}$ (voir [D. Serre, *Les matrices*]).

On peut aussi comparer le groupe unitaire en dimension 2 et le groupe euclidien en dimension 3.

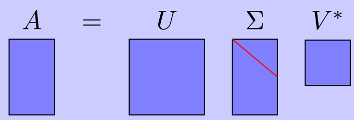
Théorème 75 *(Voir 4.5 de [Mneimné–Testard]).*
Il y a un isomorphisme de groupes $SU_2(\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{id}\} \to SO_3(\mathbb{R})$.

5.3 La décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières semble être apparue récemment dans le programme de l'agrégation (2017 ?). L'énoncé date pourtant du XIX^{e} siècle et des algorithmes efficaces calculent cette décomposition au moins depuis les années 60. C'est une décomposition matricielle qui est une première étape dans un certain nombre d'algorithmes. On pourra, par exemple, s'en convaincre en regardant la courte vidéo suivante : https://www.youtube.com/watch?v=CQbbsKK1kus.

5.3.1 L'énoncé et sa démonstration

Théorème 76.
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ une matrice pas nécessairement carrée avec $m \geq n$. Alors, il existe $U \in U_m(\mathbb{C})$ et $V \in U_n(\mathbb{C})$ des matrices unitaires, et $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice diagonale à coefficients réels positifs *avec $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n$ uniquement déterminés, tels que*



Remarques. 1. Le théorème est aussi valable en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$, $U_n(\mathbb{C})$ par $O_n(\mathbb{R})$ et "unitaires" par "orthogonales".

2. Les vecteurs colonnes de U sont appelés les *vecteurs singuliers à gauche* et les vecteurs colonnes de V sont appelés les *vecteurs singuliers à droite*. Les éléments σ_i sont appelés les *valeurs singulières*. Le mot "singulier" est utilisé pour ne pas confondre ces vecteurs et ces valeurs avec les vecteurs propres et les valeurs propres.

3. Un intérêt de cette décomposition est qu'elle fonctionne pour toutes les matrices, carrées ou non. Par opposition, la diagonalisation des matrices ne s'applique que pour les matrices carrées et n'existe pas toujours.

Démonstration. Il est possible de démontrer le résultat par l'analyse mais nous utiliserons l'algèbre pour utiliser le théorème spectral que nous avons vu précédemment.
La matrice A^*A est carrée, positive et hermitienne. D'après le théorème spectral (corollaire 72), il existe une matrice unitaire $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$V^*A^*AV = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pour une matrice diagonale D définie positive, de taille r, avec $r = \mathrm{rg}(A)$. En écrivant V de façon adaptée, on a

$$\begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} A^*A \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^*A^*AV_1 & V_1^*A^*AV_2 \\ V_2^*A^*AV_1 & V_2^*A^*AV_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $V_1 \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{C})$ et $V_2 \in \mathcal{M}_{n,n-r}(\mathbb{C})$. Ainsi, $V_1^*A^*AV_1 = D$ et $AV_2 = 0$. On pose $U_1 := D^{-\frac{1}{2}}V_1^*A^*$, de sorte que $U_1AV_1 = D^{\frac{1}{2}}$ et $U_1 \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{C})$ vérifiant $U_1U_1^* = I_r$. On complète arbitrairement U_1 par une matrice $U_2 \in \mathcal{M}_{m-r,m}(\mathbb{C})$ telle que $\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ soit unitaire. On peut alors vérifier que

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

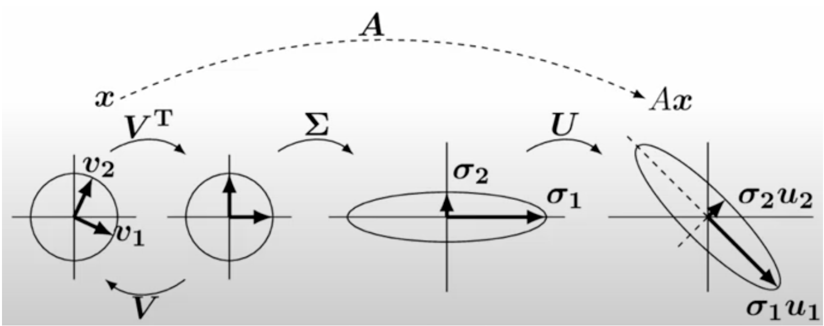
puisque par définition de U_1, on a $AV_1 = U_1^*D^{\frac{1}{2}}$ et ainsi, $U_2AV_1 = U_2U_1^*D^{\frac{1}{2}} = 0$. La matrice U recherchée est la matrice adjointe de $\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$. □

5.3.2 Interprétation géométrique

Le théorème de décomposition en valeurs singulières peut être résumé par le phénomène suivant :

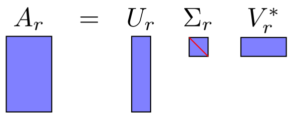
l'image de la sphère unité sous l'action d'une matrice est une hyperellipsoïde.

Nous nous contenterons d'un dessin [2] pour illustrer ce fait :



2. repris de la vidéo https://www.youtube.com/watch?v=IH07_n7Y09s

Remarque. La décomposition en valeurs singulières répond à la question suivante : étant donné une matrice rectangulaire A, quelle est la matrice A_r de rang r, pour $r < \mathrm{rg}(A)$, de même taille, qui est la plus proche de A pour la norme euclidienne matricielle ?
Il suffit de considérer le produit $A_r = U_r \Sigma_r V_r^*$, où U_r est formée des r premières colonnes de U, V_r^* est formée des r premières lignes de V^* et $\Sigma_r \coloneqq \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$:



Géométriquement, on obtient la meilleure approximation d'une hyperellipsoïde (de dimension $\mathrm{rg}(A)$) par une hyperellipsoïde de dimension r.

Questions de fin de leçon.

Dans un espace hermitien,

- comment retrouve-t-on la forme hermitienne φ à partir de la forme quadratique hermitienne q ?
- pourquoi considère-t-on des formes hermitiennes plutôt que des formes bilinéaires symétriques ?
- qu'est-ce qu'une quasi-symétrie ?
- est-ce que les matrices symétriques sont diagonalisables en base orthonormée ?

Bibliographie

[CG17] P. Caldero J. Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries*, Tome premier, Calvage & Mounet, 2017.

[Com98] F. Combes, *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.

[Fre99] J. Fresnel, *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens*, Hermann, 1999.

[Maz96] P. Mazet, *Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'agrégation*, Ellipses, 1996.

[SP11] C. de Seguins Pazzis, *Invitation aux formes quadratiques*, Calvage & Mounet, 2011

[TB97] L. N. Trefethen et D. Bau, *Numerical linear algebra*, SIAM, 1997.