Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Trabajo de fin de grado

C* Álgebras y su aplicación en la formulación de la mecánica cuántica

C Algebras theory and its application to quantum mechanics*

Javier González Delgado

supervisado por

Daniel de la Fuente Benito

Jorge Jiménez Meana

17 de julio de 2019

A mis padres

Agradecimientos

A mi tutor, Daniel, por haberme dedicado su tiempo y haberse volcado de manera desinteresada en este trabajo. Por su cercanía, su disposición y su apoyo constante. A mis compañeros y amigos de la Facultad, por haberme hecho disfrutar de estos años. Y a mis padres, por su esfuerzo y su fe incondicional.

Introducción

Los cimientos de la Física Clásica se asentaron con una mirada del Universo a escala cosmológica. En 1687, Isaac Newton publicó su obra *PhilosophiæNaturalis Principia Mathematica*, cuya tercera parte, *De mundi systemae*, explica cómo la ley de gravitación concuerda con el movimiento de los planetas, satélites, cometas y demás componentes del 'sistema del mundo'. Lo que Newton buscaba era formular unas leyes universales de la Física con las que entender la composición del Universo bajo una óptica macroscópica. No fue hasta los siglos XIX y XX cuando la ciencia comenzó a comprender el Universo a una escala microscópica, estableciendo que la materia está compuesta de ciertos constituyentes fundamentales que no obedecen las leyes de movimiento de Newton y cuyo estado físico no puede ser determinado con total precisión. De esta manera, en una descripción geométrica de la Física a escala subatómica, el concepto de *punto* pierde relevancia. Esto es algo esencial a tener en cuenta si se busca, como le ocurría a Einstein, encontrar una descripción del Universo en términos puramente geométricos, tal que la Mecánica Cuántica y la Teoría de la Relatividad surjan como casos particulares.

Estas consideraciones históricas motivan el problema de concebir una *geometría sin puntos* que pueda modelar la geometría del espacio de estados de un sistema físico o, incluso, del espacio-tiempo en el que vivimos. Este proyecto matemático se conoce como *Geometría no Conmutativa* y, al fusionar elementos del Álgebra, el Análisis y la propia Geometría, ejemplifica la unificación de las diferentes ramas de las Matemáticas que caracterizó al siglo XX. Su planteamiento base se construye desde el concepto central de C^* *álgebra*, introducido en 1943 bajo el nombre de 'anillo completamente regular'. Cuando esta estructura es conmutativa, es posible asociarla biunívocamente con un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto a partir de la correspondencia de Gelfand-Naimark. Es más, esta dualidad se eleva a una *equivalencia categórica*, que establece un diccionario perfecto entre la catergoría de las C^* álgebras conmutativas y la de los espacios topológicos Hausdorff y localmente compactos. De esta manera, la topología de un espacio X puede expresarse completamente en términos de la estructura algebraica de su C^* álgebra asociada, y viceversa. Por ejemplo, los puntos de X se corresponden con los caracteres del álgebra, la conexión con la no existencia de proyectores no triviales o la compactificación del espacio con la adjunción de unidad. Es precisamente de esta equivalencia de donde surge la Geometría no Conmutativa, que extiende el funtor precedente a la categoría de las C^* álgebras no conmutativas y *define* un nuevo tipo de espacios, denominados *espacios topológicos no conmutativos* o *espacios cuánticos*, cuyas propiedades topológicas se explotarán a partir de la C^* que los define. Como en el caso no conmutativo la existencia de caracteres no está garantizada, los espacios cuánticos serán, por lo general, espacios sin puntos.

Como ya hemos apuntado, este tipo de espacios se presentan como buenos candidatos para describir la geometría del mundo y, en particular, la del mundo cuántico. Partiendo de la equivalencia de Gelfand-Naimark, el enfoque de la Geometría no Conmutativa sirve de base para la construcción de una formulación general de las Mecánicas Clásica y Cuántica en términos de C^* álgebras. Esta propuesta nació de la mano de Irving Segal en 1947 como contestación a la axiomática de Dirac-von Neumann que, según algunos de sus críticos como Strocchi o Emch, está débilmente vinculada a la base experimental de la Física Teórica y abruptamente distanciada del formalismo de la Mecánica Clásica. Aunque estos axiomas proporcionan un fundamento matemático importante para la Teoría Cuántica, su justificación a priori no es muy convincente, sino que, como apuntaba el mismo Dirac, encuentran un respaldo a posteriori una vez comprobado que sus predicciones concuerdan con la experimentación. De este modo, la propuesta de Segal no se presenta aquí como una formulación alternativa sino más bien *complementaria*, aportando un punto de vista más global, próximo a la intuición física y compatible con la Mecánica Clásica.

Físicamente, el marco que emerge de la dualidad de Gelfand-Naimark y de la teoría de C^* álgebras supone un cambio de perspectiva drástico. En la descripción estándar de un sistema físico, la geometría aparece en primer lugar: se comienza con la construcción del espacio de fases, que induce una descripción geométrica del sistema, y a continuación se considera el álgebra de las funciones continuas sobre dicho espacio para describir los observables. Con el planteamiento de Segal esta relación se invierte: en primer lugar, se determina una C^* álgebra abstracta que caracterizará a los observables del sistema y, por tanto, codificará las relaciones entre las diferentes magnitudes físicas del mismo. Posteriormente, el espacio de fases se reconstruirá vía el funtor de Gelfand-Naimark. De este modo, un sistema queda definido por sus propiedades físicas, es decir, por la estructura algebraica del conjunto de sus observables, que pueden ser expresados matemáticamente mediante ciertos elementos de una C^* álgebra con o sin unidad. Los seguidores de este formalismo aseguran que la estructura de C^* álgebra es el lenguaje más adecuado para la descripción matemática de un sistema físico general, pues permite una formulación simultánea de las Mecánicas Clásica y Cuántica que se mantiene fiel a la intuición física en su construcción.

Es claro que la axiomática usual se salta el primer paso del desarrollo natural de toda teoría, consistente en la introducción de los principios físicos que la motivan y de su vinculación con el marco matemático a construir, comenzando en su lugar con un repentino e injustificado desarrollo matemático formal. No es de extrañar que este enfoque fuera sugerido por un matemático, Hilbert, fundador del formalismo moderno y firme defensor de la Matemática clásica, en claro contraste con las ideas de otros matemáticos menos idealistas como Brouwer o Weyl. Sin embargo, el marco matemático de los espacios de Hilbert *no necesita ser postulado*, sino que se *deriva* de la estructura algebraica del conjunto de los observables que formula Segal. En otras palabras, la axiomática usual se presenta ahora como una *consecuencia* de una construcción más general, que reduce la existencia de representaciones de un álgebra en espacios de Hilbert a la existencia de estados, que está siempre garantizada.

En definitiva, una axiomática en términos de C^* álgebras permite formular la Mecánica Cuántica de manera natural al construirse sobre la idea base de la Geometría no Conmutativa, que se plantea como el lenguaje matemático apropiado para describir la geometría del Universo. Se consigue así una formulación general, que recupera las propiedades geométricas del espacio de fases a partir la información algebraica subyacente, es decir, a partir de las propiedades físicas del sistema, y que nace como extensión de la más intuitiva y tangible Mecánica Clásica.

La estructura principal de este trabajo se compone de tres capítulos y un apéndice, precedidos de un capítulo preliminar en el que se recuerdan algunas nociones básicas del Análisis Funcional y de la Teoría de la Medida que nos serán necesarias más adelante. El primer capítulo tiene por objetivo la construcción de la equivalencia entre espacios topológicos y álgebras. Este resultado supone el punto de partida de la Geometría no Conmutativa y de la formulación de la Mecánica Cuántica que hemos motivado, luego una construcción rigurosa, consistente y detallada se ha considerado, cuanto menos, esencial. Partiremos de la definición de la estructura matemática central, la C^* álgebra, y de un estudio de sus propiedades más básicas. Se introducirán los dos ejemplos prototipo, claves en todo el desarrollo posterior, de las álgebras de las funciones continuas complejas y de los operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert, para pasar a desarrollar la teoría espectral y proporcionar, en el caso conmutativo, todas las herramientas necesarias para la construcción de la equivalencia, es decir, para el enunciado del resultado central de este trabajo: el Teorema de Gelfand-Naimark. Es aquí donde se aconseja la lectura del apéndice 'Equivalencia entre espacios topológicos y C^* álgebras', que introduce el lenguaje de categorías, desarrolla la construcción del funtor de Gelfand-Naimark, y proporciona un punto de vista global desde el que abordar la Geometría no Conmutativa. La segunda parte del capítulo analiza en detalle algunas de las identificaciones existentes entre las estructuras algebraica y topológica, terminando con el estudio de algunas familias de elementos destacados en una C^* álgebra, los normales y hermíticos, con propiedades muy relevantes a consecuencia del isomorfismo de Gelfand-Naimark. Por un lado, permiten construir un cálculo funcional continuo que reproduce en la C^* álgebra el cálculo sobre las funciones continuas complejas y, por otro, muestran que la norma de toda C^* álgebra queda determinada por su estructura algebraica. Esta última es una consecuencia muy importante en términos físicos, pues muestra que las características objetivas de un sistema -los valores espectrales, las distribuciones de probabilidad asociadas o los estados puros- quedan completamente determinadas por el álgebra de observables, es decir, por ciertas reglas de suma, producto, involución y producto por escalares.

El segundo capítulo pretende construir el puente entre la teoría de C^* álgebras y la formulación de la Mecánica Cuántica. Para ello, se introducirá en primer lugar el concepto de estado en una C^* álgebra, que en el caso conmutativo se identifica con una medida de probabilidad en el espacio topológico asociado, y que garantiza, a través de la *construcción GNS*, la existencia de representaciones en un espacio de Hilbert. Estas herramientas nos permitirán probar el segundo teorema de Gelfand-Naimark, que supone el vínculo entre el marco algebraico y el contexto de los espacios de Hilbert de la axiomática usual. Este resultado nos dice que toda C^* álgebra puede verse como una subálgebra cerrada del álgebra de operadores lineales y acotados sobre algún espacio de Hilbert, y tiene una relevancia histórica especial ya que recoge la caracterización original de este tipo de estructuras. A continuación trataremos los conceptos de estado y estado puro, y veremos que estos últimos se relacionan con ciertas representaciones irreducibles de la C^* álgebra y, en el caso conmutativo, con los puntos del espacio asociado. Así, tener un estado puro clásico es tener un punto en el espacio de fases y, por tanto, total certeza del comportamiento del sistema. Además, como consecuencia del teorema de Krein-Milman, todo estado puede aproximarse por una suma finita convexa de estados puros, dando lugar a lo que se conoce como estado *mezcla* o *estadístico*. Finalmente, se estudiará el álgebra de los operadores acotados, que se plantea como extensión del álgebra de las matrices complejas en el caso infinito-dimensional. Este álgebra constituye el marco matemático del formalismo usual en Mecánica Cuántica, y la determinación de su espacio de estados (puros) será esencial a la hora de derivar la formulación habitual de los estados cuánticos a partir de la axiomática general.

En el capítulo final se presenta la formulación algebraica de las Mecánicas Clásica y Cuántica, que pretende ser fiel a la intuición física y alejarse del modus operandi de los postulados de Dirac-von Neumann. Es bien conocido que la Mecánica Hamiltoniana surge como una adaptación a un marco matemáticamente más conveniente de la Mecánica de Newton, que sí nos resulta más intuitiva a partir de los fenómenos físicos observados. El planteamiento C^* algebraico será una continuación de la reformulación anterior. Tomaremos la Mecánica Hamiltoniana y la reformularemos en términos de C^* álgebras, utilizando las herramientas construidas en los capítulos precedentes y basándonos en los axiomas que describen un sistema clásico. En este punto, analizaremos qué parte de esta descripción algebraica debe ser modificada para que concuerde con los hechos experimentales que caracterizan a los sistemas cuánticos. Tras una breve discusión, nos resultará evidente que lo que no encaja es la *conmutatividad* del álgebra de observables. De hecho, veremos que, eliminando dicha conmutatividad, se llega a la expresión general del principio de incertidumbre de Heisenberg para cualquier par de observables, cuando un sistema cuántico se encuentra preparado en un cierto estado. Esto nos lleva a postular los axiomas que definen los estados y observables cuánticos extendiendo la formulación anterior, construida para un sistema clásico, modificando únicamente la conmutatividad de la C^* álgebra. Es esencial remarcar lo sucinta (pero sutil) que es esta alteración, comparándola con la diferencia abismal que existe entre las formulaciones clásica y cuántica usuales. En consecuencia, lo que estamos postulando mediante esta axiomática es que la geometría que gobierna las leyes de la Mecánica Cuántica es esta nueva rama de las Matemáticas que hemos denominado *Geometría no Conmutativa*. Una vez presentados estos dos primeros axiomas, que introducen los conceptos de estado y observable cuántico, recurriremos al teorema de Gelfand-Naimark para deducir sus caracterizaciones usuales en espacios de Hilbert. Finalmente, mostraremos someramente cómo es posible formular los postulados relativos a las medidas de probabilidad y a la evolución temporal de un sistema cuántico en términos de C^* álgebras, que cerrarán este trabajo y servirán de motivación para profundizar en el estudio de esta teoría que, como se ha puesto de manifiesto, presenta un amplio horizonte físico y matemático.

Índice general

Introducción III

0. Preliminares 1

0.1. Espacios normados y de Hilbert . . . 1
0.2. Topologías en el espacio dual . . . 3
0.3. Teoría de la medida . . . 6
0.4. Integral de Riemann-Stieltjes . . . 8

1. Teoría general de C* Álgebras 9

1.1. Álgebras de Banach y C^* álgebras . . . 9
1.1.1. Primeras definiciones y resultados . . . 9
1.1.2. El espacio de las funciones continuas complejas . . . 13
1.1.3. Operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert . . . 14
1.1.4. Espectro de un elemento de un álgebra de Banach . . . 15
1.1.5. Álgebras de Banach conmutativas . . . 19
1.2. Teorema de Gelfand-Naimark . . . 26
1.2.1. Ideales en una C^* álgebra . . . 27
1.2.2. Automorfismos . . . 30
1.2.3. Proyectores . . . 31
1.2.4. Adjunción de unidad . . . 33
1.2.5. Elementos normales y hermíticos . . . 34

2. Representaciones y estados 41

2.1. Elementos positivos . . . 41
2.2. Estados de una C^* álgebra . . . 43
2.3. Representaciones de una C^* álgebra . . . 51
2.3.1. Construcción GNS . . . 53
2.3.2. Teorema de Gelfand-Naimark . . . 56
2.4. Estados puros y representaciones irreducibles . . . 59
2.5. El álgebra de los operadores compactos . . . 64

3. Formulación de las Mecánicas Clásica y Cuántica **71**
3.1. Reformulación algebraica de la Mecánica Clásica 72
3.2. Estados y observables de un sistema cuántico 77
3.3. Medidas de probabilidad en un sistema cuántico 82
3.4. Evolución temporal en la imagen de Heisenberg 87

A. Equivalencia categórica entre espacios topológicos y C^* álgebras **91**

Bibliografía **99**

Capítulo 0

Preliminares

Todos los espacios vectoriales que se considerarán en este trabajo estarán definidos sobre el cuerpo de los complejos $\mathbf{C}$, salvo que se indique explícitamente lo contrario. Igualmente, las funciones y los funcionales que se definan tomarán valores en $\mathbf{C}$.

0.1. Espacios normados y de Hilbert

Definición 0.1.1. Un espacio vectorial E dotado de una topología τ se denomina *espacio vectorial topológico* si las aplicaciones suma y producto por escalares,

$$\begin{array}{rccc} S\colon & E\times E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} M\colon & \mathbf{C}\times E & \longrightarrow & E \\ & (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda x \end{array} \tag{1}$$

son continuas.

Definición 0.1.2. Se dice que un espacio topológico (X,τ) es *Haussdorf* o T_2 si para todo par de puntos distintos $x,y\in X$, $x\neq y$, existen abiertos $U,V\in\tau$ tales que $x\in U$ y $y\in V$ con $U\cap V=\emptyset$.

Definición 0.1.3. Sea E un espacio vectorial y $\|\cdot\|:E\longrightarrow\mathbf{R}$ una aplicación. El par $(E,\|\cdot\|)$ se llama *espacio normado* si se verifican:

i) $\|x\|\geq 0 \quad \forall x\in E$;

ii) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$;

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \quad \forall x \in E$;

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$ *(desigualdad triangular).*

Definición 0.1.4. Se dice que una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de un espacio normado E es *de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\| \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0. \tag{2}$$

Definición 0.1.5. Se dice que un espacio normado es *de Banach* si es completo, es decir, si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Proposición 0.1.1. Sea E un espacio normado y F un subespacio cerrado suyo. En el cociente E/F se define la norma:

$$\|x + F\| = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x + y\|, \tag{3}$$

para cada $x \in E$. Si E es un espacio de Banach, E/F es un espacio de Banach con la norma anterior.

Definición 0.1.6. Sea E un espacio vectorial. Una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbf{C}$ se llama *producto interno* si satisface:

i) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in E$;

ii) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in E$;

iv) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{C}$.

Observación 0.1.1. Un espacio vectorial provisto de un producto interno $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ es un espacio normado con la norma que induce el producto $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot\,, \cdot \rangle}$.

Definición 0.1.7. Un *espacio de Hilbert H* es un espacio vectorial provisto de un producto escalar y completo en la norma inducida.

Proposición 0.1.2. En un espacio de Hilbert H se verifica la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \quad \forall x, y \in H. \tag{4}$$

Dados dos espacios normados E y F, se denota por $L(E,F)$ al conjunto de las aplicaciones lineales de E en F y por $\mathcal{L}(E,F)$ al conjunto de las aplicaciones lineales y continuas de E en F. Los elementos de $\mathcal{L}(E,F)$ se llaman *operadores*.

Proposición 0.1.3. Si F es un espacio de Banach, $\mathcal{L}(E,F)$ es un espacio de Banach con la norma usual de un operador:

$$T \in \mathcal{L}(E,F), \quad \|T\| = \sup_{x \in B_E} \|Tx\|, \tag{5}$$

donde $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es la bola cerrada de E.

Proposición 0.1.4. Si $T \in L(E,F)$, entonces T es acotado si y solo si T es continuo (en las topologías inducidas de las normas). De este modo, es equivalente hablar de $\mathcal{L}(E,F)$ que del conjunto de operadores lineales y acotados de E en F.

Teorema 0.1.5 (Hann-Banach, versión analítica, caso complejo)**.** *Sea E un $\mathbf{C}$-espacio vectorial, $F \subset E$ un subespacio suyo y $f \in L(E,\mathbf{C})$ tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para una seminorma $p : E \longrightarrow [0,\infty)$. Entonces, existe $\tilde{f} \in L(E,\mathbf{C})$ tal que:*

i) $\tilde{f}(x) = f(x) \quad \forall\, x \in F$ *(extensión de f);*

ii) $\left|\tilde{f}(x)\right| \leq p(x) \quad \forall\, x \in E$ *(dominada por p).*

0.2. Topologías en el espacio dual

Definición 0.2.1. Al conjunto $\mathcal{L}(E,\mathbf{C})$ se le denota por E^* y se le llama espacio *dual* de E. Como $\mathbf{C}$ es un espacio de Banach, E^* es un espacio de Banach con la norma usual de los operadores (5).

Además de la topología que induce la norma, el espacio dual de un espacio normado E puede dotarse de otras topologías. Para cada $\varepsilon > 0$, cada subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$ y cada $f_0 \in E^*$ consideramos el conjunto:

$$V^{f_0}_{\varepsilon;x_1,\ldots,x_n} = \{f^* \in E^* : |f - f_0(x_i)| < \varepsilon \quad i = 1, \ldots, n\} \subset E^*. \tag{6}$$

La colección de todos los conjuntos de la forma (6) para todo $\varepsilon > 0$, todo $f_0 \in E^*$ y todo subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$ forma una base de entornos para una topología en E^*, que se denomina *topología $*$-débil* y se denota por $\sigma(E^*, E)$, o w^* si no hay confusión.

Observación 0.2.1. La topología w^* es más débil que la topología de E^* como espacio normado, es más, es la topología más débil para la que las apliaciones lineales

$$\begin{array}{rccc} x\colon & E^* & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & f & \longmapsto & f(x), \end{array} \tag{7}$$

son continuas.

Proposición 0.2.1. Dado un espacio normado E, $(E^*, \sigma(E^*, E)) = (E^*, w^*)$ es un espacio vectorial topológico T_2.

Teorema 0.2.2 (Alaoglu)**.** *La bola B_{E^*} es w^*-compacta.*

Considerando los espacios E, E^* y E^{**} con las topologías heredadas de la norma, en general $E \neq E^{**}$ (lo que sí es cierto bajo las topologías débiles). En este caso hay que entender a E como una copia canónica en E^{**}, pues podemos construir la inmersión isómetrica siguiente:

$$\begin{array}{rccccc} J\colon & E & \longrightarrow & E^{**} & & \\ & x & \longmapsto & x\colon & E^* \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & & & & x^* \longmapsto & x(x^*) = x^*(x). \end{array} \tag{8}$$

Así, $E \hookrightarrow E^{**}$ isométricamente. Esto nos permite dotar a E de la topología $\sigma(E^{**}, E^*)|_E$, que llamaremos *topología débil* y denotaremos por $\sigma(E, E^*)$ o por w si no hay confusión.

Observación 0.2.2. Dado un espacio normado E, $(E, \sigma(E, E^*)) = (E, w)$ es un espacio vectorial topológico y T_2.

Observación 0.2.3. En general, B_E no es $\sigma(E, E^*)$-compacta.

Los espacios normados E tales que, con la norma usual de operadores, satisfacen $E = E^{**}$ se llaman *reflexivos*. Todos los espacios de dimensión finita son reflexivos, así como todos los espacios de Hilbert o los espacios de sucesiones l_p con $1 < p < \infty$.

Definición 0.2.2. Sean E, F espacios normados y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se define el *operador conjugado*, *dual* o *traspuesto* de T como la aplicación:

$$\begin{aligned} T^*\colon\ F^* &\longrightarrow E^* \\ f &\longmapsto T^*f\colon\ E \longrightarrow \mathbf{C} \\ &\qquad\qquad\quad x \longmapsto (T^*f)(x) = f(Tx). \end{aligned} \tag{9}$$

Observación 0.2.4. Claramente $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$. Además, si T es w-w-continuo, T^* es w^*-w^*-continuo y $\|T\| = \|T^*\|$.

Proposición 0.2.3. Sea H un espacio de Hilbert. Entonces H y H^* son antilinealmente isométricos a través de la aplicación *bemol*, $\flat$,

$$\begin{aligned} \flat\colon\ H &\longrightarrow H^* \\ x &\longmapsto x^\flat\colon\ H \longrightarrow \mathbf{C} \\ &\qquad\qquad\quad y \longmapsto \langle y, x\rangle. \end{aligned} \tag{10}$$

Definición 0.2.3. Si H es un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H, H)$, se define su operador *adjunto* como el único operador $T^* \in \mathcal{L}(H, H)$ tal que:

$$\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle, \tag{11}$$

para todo $x, y \in H$.

Observación 0.2.5. Tras haber identificado isométricamente H con su dual H^*, es claro que el operador adjunto de T coincide con su operador dual o conjugado definido en 0.2.2.

0.3. Teoría de la medida

Definición 0.3.1. Un *espacio de medida* es una terna (X, Σ, μ) donde X es un conjunto, $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ tiene las propiedades:

i) $\emptyset \in \Sigma$,

ii) Si $\{E_n : n \in \mathbf{N}\} \subset \Sigma$ es una colección numerable de elementos de Σ, entonces $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} E_n \in \Sigma$,

iii) Si $E \in \Sigma$, entonces $X \backslash E \in \Sigma$,

y $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty)$ es una aplicación satisfaciendo:

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) Si $\{E_n : n \in \mathbf{N}\} \subset \Sigma$ es tal que $E_n \cap E_m = \emptyset \quad \forall n \neq m$, entonces $\mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} E_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbf{N}} \mu(E_n)$.

Se dice entonces que Σ es una *σ-álgebra*, μ una *medida* sobre Σ y que los elementos de Σ son conjuntos *medibles.*

Definición 0.3.2. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Si μ satisface las condiciones:

i) $\mu(\Sigma) \subset [0, 1]$,

ii) $\mu(X) = 1$,

entonces se dice que μ es una *medida de probabilidad.*

Definición 0.3.3. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $A \subset \Sigma$. Se dice que una función $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ es *medible* si para todo $\alpha \in \mathbf{R}$, el conjunto $\{x \in A : f(x) < \alpha\}$ es medible.

Definición 0.3.4. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $A \subset \Sigma$. Se dice que una función $s : A \longrightarrow \mathbf{R}$ es *simple* si su imagen $s(A)$ es finita. En ese caso, si denotamos $s(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, s puede escribirse en su *expresión canónica*:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{E_i}, \tag{12}$$

donde $E_i = s^{-1}(\lambda_i)$ y χ_{E_i} denota la función indicadora del conjunto E_i.

Definición 0.3.5. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, $A \in \Sigma$, una función $s : A \longrightarrow [0, \infty)$ simple medible y $E \subset A$. Se define la *integral* de la función s sobre E como el valor:

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(E \cap E_i), \tag{13}$$

donde $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{E_i}$ es la expresión canónica de s.

Definición 0.3.6. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, $f : X \longrightarrow [0, \infty)$ una función medible y $A \in \Sigma$. Se define la *integral* de f respecto de μ sobre A como el valor:

$$\int_A f d\mu = \sup \left\{ \int_A s d\mu : 0 \leq s \leq f,\ s : X \longrightarrow [0, \infty) \text{ simple medible} \right\}. \tag{14}$$

Definición 0.3.7. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$. Se define la *parte positiva* de f como la función $f^+ = \text{máx}\{f, 0\}$ y la *parte negativa* de f como la función $f^- = -\text{mín}\{f, 0\}$.

Observación 0.3.1. En las condiciones de la definición anterior, es claro que $f = f^+ - f^-$, $|f^+| \geq 0$, $|f^-| \geq 0$, $|f| = f^+ + f^-$ y que f es medible si y solo si f^+ y f^- son medibles.

Definición 0.3.8. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ una función medible. Si $A \in \Sigma$, se dice que f es *integrable sobre* A si:

$$\int_A f^+ d\mu < \infty \quad \text{o} \quad \int_A f^- d\mu < \infty. \tag{15}$$

En ese caso se define la *integral* de f respecto de μ sobre A como el valor:

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu. \tag{16}$$

Si ambas integrales (15) son finitas, diremos que f es *sumable (1-sumable)* sobre A. Al conjunto de todas las funciones sumables sobre A se le denota por $\mathcal{L}_1(A)$.

Definición 0.3.9. Si X es un espacio topológico localmente compacto y T_2 y $C(X)$ denota el conjunto de las funciones continuas de X en $\mathbf{C}$, un funcional lineal T sobre $C(X)$ se denomina *positivo* si para todo $f \in C(X)$ no negativo, $T(f) \geq 0$.

Observación 0.3.2. De acuerdo a las definiciones anteriores y a las propiedades de linealidad de la integral, si (X, Σ, μ) es un espacio de medida y X un espacio topológico localmente compacto y T_2, el funcional

$$\begin{array}{rccc} T\colon & C(X) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & f & \longmapsto & \int_X f d\mu \end{array} \tag{17}$$

es lineal y positivo.

Teorema 0.3.1 (Teorema de Representación de Riesz)**.** *Sean X un espacio topológico localmente compacto y T_2 y T un funcional lineal y positivo sobre $C_0(X)$. Entonces, existen $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ y $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty)$ tales que (X, Σ, μ) es un espacio de medida y*

$$T(f) = \int_X f d\mu \tag{18}$$

para cada $f \in C_0(X)$. La σ-álgebra Σ es justamente la σ-álgebra de Borel sobre X, que es la generada por los subconjuntos abiertos de la topología de X.

0.4. Integral de Riemann-Stieltjes

Sea $[a, b] \subset \mathbf{R}$, $P = \{a = x_0 < x_1, \ldots, x_n = b\}$ una partición del intervalo y $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Se define la *integral de Riemann-Stieltjes* de f con respecto de g en $[a, b]$, que se denota por

$$\int_a^b f(x) dg(x), \tag{19}$$

como el límite cuando la norma de P (la longitud del mayor subintervalo) tiende a cero de:

$$S(P, f, g) = \sum_{i=0}^{n} f(c_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)], \tag{20}$$

donde $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$. En este contexto se entiende el *límite* de la suma (20) como el valor A tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada partición P con norma menor que δ y cada elección de puntos $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ se satisface $|S(P, f, g) - A| < \varepsilon$. Esta integral es una generalización de la integral de Riemann, a la que es equivalente cuando $g = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$.

Capítulo 1

Teoría general de C* Álgebras

1.1. Álgebras de Banach y C^* álgebras

1.1.1. Primeras definiciones y resultados

Definición 1.1.1. Se llama *álgebra* a un espacio vectorial $\mathcal{A}$ dotado de una operación interna (que denotaremos con notación multiplicativa) que satisface las propiedades siguientes, para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbf{C}$:

i) $(ab)c = a(bc)$ *(Asociatividad)*;

ii) $a(b + c) = ab + ac$ *(Distributividad por la izquierda)*;

iii) $(a + b)c = ac + bc$ *(Distributividad por la derecha)*;

iv) $(\alpha a)b = \alpha(ab)$.

Si además se verifica $ab = ba \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$, se dice que el álgebra es *conmutativa.*

Definición 1.1.2. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra dotada de una norma $\|\cdot\|$ tal que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Si además el producto es continuo, es decir, si para todo $a, b \in \mathcal{A}$

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \tag{1.1}$$

entonces $\mathcal{A}$ se llama *álgebra de Banach.*

Definición 1.1.3. Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es *unital* si existe un elemento $1_\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ tal que $1_\mathcal{A}\, a = a\, 1_\mathcal{A} = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$ y tal que:

$$\|1_\mathcal{A}\| = 1. \tag{1.2}$$

Al elemento $1_\mathcal{A}$ se le llama *unidad*.

Definición 1.1.4. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Un subespacio cerrado $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ se denomina:

i) *ideal a izquierdas* si $ay \in \mathcal{I}\ \forall y \in I$, $\forall a \in \mathcal{A}$;

ii) *ideal a derechas* si $ya \in \mathcal{I}\ \forall y \in I$, $\forall a \in \mathcal{A}$;

iii) *ideal* si es ideal a derechas e ideal a izquierdas.

Si $\mathcal{I}$ es un ideal de $\mathcal{A}$ tal que, si $\mathcal{J}$ es otro ideal con $\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{A}$, entonces o bien $\mathcal{J} = \mathcal{I}$ o bien $\mathcal{J} = \mathcal{A}$, $\mathcal{I}$ se llama ideal *maximal*.

Un ideal tiene estructura de álgebra de Banach. Además, si un ideal $\mathcal{I}$ contiene un elemento invertible de $\mathcal{A}$, entonces necesariamente $\mathcal{I} = \mathcal{A}$. En efecto, si $a \in \mathcal{I}$ es invertible, $a^{-1}a = 1_\mathcal{A} \in \mathcal{I}$ y por tanto $b = b1_\mathcal{A} \in \mathcal{I}$ para todo $b \in \mathcal{A}$. De aquí el interés de considerar álgebras de Banach con y sin unidad, pues todo ideal unital deja inmediatamente de ser propio. No obstante, cuando un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ no tiene unidad es posible añadirle una considerando el espacio:

$$\mathcal{A}_\mathbb{I} = \mathcal{A} \oplus \mathbf{C}, \tag{1.3}$$

cuyos elementos serán los $a + \lambda$ con $a \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbf{C}$. Definiremos el elemento unidad como $1_{\mathcal{A}_\mathbb{I}} = 0 + 1_\mathbf{C}$, dotando al espacio del producto:

$$(a + \lambda)(b + \mu) = (ab + \lambda b + \mu a) + \lambda\mu, \tag{1.4}$$

y de la norma:

$$\|a + \lambda\| = \|a\| + |\lambda|. \tag{1.5}$$

Es claro que $\|1_{\mathcal{A}_{\mathbb{I}}}\| = 1$ y que en $\mathcal{A}_{\mathbb{I}}$ se satisface la continuidad del producto:

$$\|(a+\lambda)(b+\mu)\| = \|(ab+\lambda b+\mu a)\| + |\lambda\mu| \leq \|a\|\|b\| + |\lambda|\|b\| + |\mu|\|a\| + |\lambda||\mu| =$$

$$= \|a+\lambda\|\|b\| + \|a+\lambda\||\mu| = \|a+\lambda\|\|b+\mu\|,$$

luego el espacio $\mathcal{A}_{\mathbb{I}}$ es un álgebra de Banach con unidad, que se denomina *unitización* de $\mathcal{A}$. Como además la norma de cada $a \in \mathcal{A}$ coincide con la norma de $a+0$ en $\mathcal{A}_{\mathbb{I}}$, hemos probado la siguiente proposición.

Proposición 1.1.1. Para todo álgebra de Banach sin unidad $\mathcal{A}$ existe un álgebra de Banach unital $\mathcal{A}_{\mathbb{I}}$ tal que $\mathcal{A}/\mathcal{A}_{\mathbb{I}} \cong \mathbf{C}$.

Proposición 1.1.2. Si $\mathcal{I}$ es un ideal de un álgebra de Banach $\mathcal{A}$, el cociente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un álgebra de Banach con la norma

$$\|a+\mathcal{I}\| = d(a,\mathcal{I}) = \inf_{y\in\mathcal{I}} \|a+y\|, \tag{1.6}$$

y el producto

$$(a+\mathcal{I})(b+\mathcal{I}) = ab+\mathcal{I}. \tag{1.7}$$

Además, si $\mathcal{A}$ es unital el álgebra cociente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ tiene unidad $1_{\mathcal{A}}+\mathcal{I}$.

Demostración. Como $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach y $\mathcal{I}$ un subespacio cerrado suyo, por 0.1.1 el cociente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un espacio de Banach con la norma 1.6. Además, por como está definido el producto 1.7, los elementos de $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ satisfacen los axiomas de la definición 1.1.1. Veamos que se satisface 1.1. Fijado un $\varepsilon > 0$ y dado $a \in \mathcal{A}$, por definición de ínfimo existe un $y \in \mathcal{I}$ tal que

$$\|a+\mathcal{I}\| + \varepsilon \geq \|a+y\|. \tag{1.8}$$

Además, $\|a+\mathcal{I}\| \leq \|a+y\|$ para todo $y \in \mathcal{I}$. Si $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$, sean $y_1, y_2 \in \mathcal{I}$ los elementos que satisfacen 1.8 fijado un $\varepsilon > 0$. Entonces:

$$\|(a_1+\mathcal{I})(a_2+\mathcal{I})\| \leq \|(a_1+y_1)(a_2+y_2)\| \leq \|a_1+y_1\|\|a_2+y_2\| \leq (\|a_1+\mathcal{I}\|+\varepsilon)(\|a_2+\mathcal{I}\|+\varepsilon),$$

por satisfacerse 1.1 en $\mathcal{A}$. Como esto es válido para todo $\varepsilon > 0$, haciendo $\varepsilon \to 0$ se tiene la continuidad del producto en $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, que es por tanto un álgebra de Banach. □

Definición 1.1.5. Se dice que un álgebra $\mathcal{A}$ es una $*$-*álgebra* si está dotada de una aplicación $* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ que satisface:

i) $(a^*)^* = a$ *(Involutividad)*;

ii) $(ab)^* = b^*a^*$ *(Antimultiplicatividad)*;

iii) $(\alpha a + b)^* = \bar{\alpha}a^* + b^*$ *(Antilinealidad)*;

para todo $a, b \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbf{C}$.

Definición 1.1.6. Una $*$-álgebra de Banach $\mathcal{A}$ que verifica

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \tag{1.9}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ se denomina *C^* álgebra*.

Observación 1.1.1. Usando que $\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\|\|a\|$ se tiene $\|a\| \leq \|a^*\|$ para todo elemento $a \in \mathcal{A}$. En particular para $a^* \in \mathcal{A}$ $\|a^*\| \leq \|a^{**}\| = \|a\|$, de modo que $\|a^*\| = \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Observación 1.1.2. Si $\mathcal{A}$ es una C^* álgebra con unidad, la condición 1.2 viene garantizada por el hecho de que $1_\mathcal{A}$ es el elemento neutro del producto. En efecto, tomando $1_\mathcal{A}^* \in \mathcal{A}$ se tiene $1_\mathcal{A}^* 1_\mathcal{A} = 1_\mathcal{A}$ y, tomando normas, $\|1_\mathcal{A}^* 1_\mathcal{A}\| = \|1_\mathcal{A}\|^2 = \|1_\mathcal{A}\|$, lo que implica 1.2.

Definición 1.1.7. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos $*$- álgebras. Una aplicación $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ se denomina $*$-*homomorfismo* si se verifican

i) $\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)$,

ii) $\varphi(a_1^*) = \varphi(a_1)^*$, para todo $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$. Si φ es inyectiva se dirá $*$-*monomorfismo*, si es suprayectiva se dirá $*$-*epimorfismo* y si es biyectiva se dirá $*$-*isomorfismo*. Se dirá que dos C^* álgebras son *isomorfas* si existe un $*$-isomorfismo isométrico entre ellas. Si $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$, φ se llama $*$-*homomorfismo unital.*

Observación 1.1.3. Es claro que la aplicación inversa de un $*$-isomorfismo es un $*$-isomorfismo. Además, un $*$-homomorfismo inyectivo es automáticamente una isometría (conserva la norma), de modo que bajo todo $*$-isomorfismo reside una correspondencia isométrica entre elementos.

Ejemplo 1.1.1. El ejemplo más sencillo de C^* álgebra es el cuerpo $\mathbf{C}$, que es un espacio de Banach y forma un álgebra con el producto usual en $\mathbf{C}$ y una C^* álgebra con la conjugación compleja.

Ejemplo 1.1.2. Las matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbf{C}$, $\mathcal{M}(\mathbf{C})$, forman una C^* álgebra. $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ es un $\mathbf{C}$-espacio vectorial y un espacio de Banach con la norma:

$$\|A\| = \sup_{x \in B_{\mathbf{C}^n}} \|Ax\|, \tag{1.10}$$

para cada $A \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$, donde $B_{\mathbf{C}^n}$ es la bola cerrada de $\mathbf{C}^n$ (centrada en 0 y de radio 1). Como:

$$\|AB\| = \sup_{x \in B_{\mathbf{C}}} |ABx| = \sup_{x \in B_{\mathbf{C}}} \|A(Bx)\| \leq \sup_{x \in B_{\mathbf{C}}} \|A\|\|BX\| = \|A\|\|B\|, \tag{1.11}$$

para todo $A, B \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$, $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ es un álgebra de Banach. Si le dotamos de la aplicación $*$ que asigna a cada matriz A su matriz adjunta A^* (que se construye conjugando y transponiendo), $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ adquiere estructura de C^* álgebra de dimensión finita y no conmutativa.

1.1.2. El espacio de las funciones continuas complejas

Sea X un espacio topológico T_2 y compacto. Es sencillo comprobar que el conjunto $C(X)$ de las aplicaciones continuas de X en $\mathbf{C}$ forma un espacio de Banach con la suma usual como operación del espacio vectorial y la norma $\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$, si $f \in C(X)$.

Veamos ahora que $C(X)$ tiene estructura de C^* álgebra. Primero comprobemos que tiene estructura de álgebra si le dotamos de la operación interna $f \cdot g = fg$, donde fg es una aplicación en $C(X)$ dada por:

$$\begin{aligned} fg\colon\ X &\longrightarrow \mathbf{C} \\ x &\longmapsto fg(x) = f(x)g(x). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Este producto satisface claramente las propiedades de la definición 1.1.1 por satisfacerlas $\mathbf{C}$, de modo que ya tenemos que $C(X)$ es un álgebra de Banach, pues si $f, g \in C(X)$:

$$\|fg\| = \sup_{x\in X}|fg(x)| = \sup_{x\in X}|f(x)g(x)| = \sup_{x\in X}|f(x)||g(x)| \leq \sup_{x\in X}|f(x)| \sup_{x\in X}|g(x)| = \|f\|\|g\| \tag{1.13}$$

Para dotarlo de estructura de $*$-álgebra tomamos la conjungación compleja:

$$\begin{aligned} *\colon\ C(X) &\longrightarrow C(X) \\ f &\longmapsto f^* = \overline{f}\colon\ \begin{aligned}[t] X &\longrightarrow \mathbf{C} \\ x &\longmapsto \overline{f}(x) = \overline{f(x)}, \end{aligned} \end{aligned} \tag{1.14}$$

que de nuevo satisface las propiedades de la definición 1.1.5 por las propiedades de la conjugación compleja. Finalmente, como en $C(X)$ se cumple la condición

$$\|ff^*\| = \left\|f\overline{f}\right\| = \sup_{x\in X}\left|f\overline{f}(x)\right| = \sup_{x\in X}\left|f(x)\overline{f(x)}\right| = \sup_{x\in X}|f(x)|^2 = \sup_{x\in X}\left|f^2(x)\right| = \left\|f^2\right\|, \tag{1.15}$$

tenemos que, para todo espacio topológico X compacto y T_2, el conjunto $C(X)$ es una C^* álgebra con el producto usual de funciones y la conjugación compleja. Es además conmutativa y tiene unidad (la aplicación constante a $1_{\mathbf{C}}$).

1.1.3. Operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert

Sea H un espacio de Hilbert. Denotaremos por $\mathcal{B}(H)$ al conjunto $\mathcal{L}(H, H)$, es decir, al conjunto de operadores lineales y acotados de H en H. Si $T \in \mathcal{B}(H)$, denotamos por T^* a su operador adjunto (definición 0.2.3).

Veamos que $\mathcal{B}(H)$ tiene estructura de C^* álgebra. Como se introdujo en el capítulo preliminar, $\mathcal{B}(H)$ es un espacio de Banach con la norma usual de los operadores. El producto algebraico es aquí la composición de operadores, que verifica claramente las propiedades de la definición 1.1.1 y cumple igualmente:

$$\|T_1T_2\| = \sup_{x\in B_H} |T_1 \circ T_2(x)| = \sup_{x\in B_H} \|T_1(T_2(x))\| \leq \sup_{x\in B_H} \|T_1\|\|T_2(x)\| = \|T_1\|\|T_2\|, \tag{1.16}$$

para todo T_1, T_2 en $\mathcal{B}(H)$, de modo que $\mathcal{B}(H)$ es un álgebra de Banach (B_H denota aquí la bola cerrada de H). Si consideramos la aplicación $* : \mathcal{B}(H) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ que asigna a cada $T \in \mathcal{B}(H)$ su operador adjunto T^*, veáse que satisface las condiciones de la definición 1.1.5 por las propiedades del producto escalar, de modo que $\mathcal{B}(H)$ es una $*$-álgebra. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene:

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle \leq \|x\|\|T^*Tx\| \leq \|T^*T\|\|x\|^2, \tag{1.17}$$

para todo $x \in H$. Así,

$$\|T\|^2 = \sup_{x\in B_H} \|Tx\|^2 \leq \sup_{x\in B_H} \|TT^*\|\|x\|^2 = \|TT^*\| \leq \|T\|\|T^*\|, \tag{1.18}$$

de donde $\|T\| \leq \|T^*\|$. Repitiendo lo mismo para T^* se tiene $\|T^*\| \leq \|T^{**}\|$. Pero como $T^{**} = T$ se deduce $\|T\| = \|T^*\|$ y sustituyendo en lo anterior $\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T\|^2$, de modo que se cumple la condición C^* y tenemos el resultado.

1.1.4. Espectro de un elemento de un álgebra de Banach

Definición 1.1.8. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y sea $a \in \mathcal{A}$. Se define el *resolvente* de a, y se denota por $\rho(a)$, como el conjunto de los elementos $z \in \mathbf{C}$ tales que $a - z1_{\mathcal{A}}$ es invertible en $\mathcal{A}$:

$$\rho(a) = \{z \in \mathbf{C} : \exists\ (a - z1_{\mathcal{A}})^{-1} \in \mathcal{A}\} \subset \mathbf{C}. \tag{1.19}$$

Definición 1.1.9. En las condiciones anteriores, se llama *espectro* de $a \in \mathcal{A}$, y se denota por $\sigma(a)$, al conjunto complementario de $\rho(a)$ en $\mathbf{C}$:

$$\sigma(a) = \{z \in \mathbf{C} : \nexists\ (a - z1_{\mathcal{A}})^{-1} \in \mathcal{A}\} \subset \mathbf{C}. \tag{1.20}$$

Nota 1.1.1. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach sin unidad y $a \in \mathcal{A}$, se define el *espectro* de a como el espectro de $a + 0$ en el álgebra unital $\mathcal{A}_{\mathbb{I}}$.

Observación 1.1.4. El espectro de $a \in \mathcal{A}$ contiene al 0 si y solo si a no es invertible.

Ejemplo 1.1.3. Si $\mathcal{A}$ es el álgebra de las matrices $n \times n$, es claro que el espectro de cualquier matriz en $\mathcal{A}$ es el conjunto de sus valores propios en $\mathbf{C}$. Para el álgebra $\mathcal{B}(H)$, el espectro se corresponde con la definición usual de espectro de un operador en $\mathcal{B}(H)$.

Teorema 1.1.3. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. El espectro $\sigma(a)$ de cualquier elemento $a \in \mathcal{A}$:*

i) está contenido en el disco de radio $\|a\|$: $\sigma(a) \subset \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq \|a\|\}$;

ii) es compacto en la topología de $\mathbf{C}$;

iii) es no vacío.

La demostración del teorema requiere de los dos lemas siguientes, útiles también de manera independiente.

Lema 1.1.4. Si $\|a\| \leq 1$ entonces la suma $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ converge a $(1_{\mathcal{A}} - a)^{-1}$ y, en consecuencia, $(a - z1_{\mathcal{A}})^{-1}$ siempre existe cuando $|z| > \|a\|$.

Demostración. Es inmediato comprobar que la sucesión $(\sum_{k=0}^{n} a^k)_n$ es de Cauchy en $\mathcal{A}$, que es completo por definición, luego la suma convergerá a un elemento del álgebra. Ahora:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k(1_{\mathcal{A}} - a) = \sum_{k=0}^{n}(a^k - a^{k+1}) = 1_{\mathcal{A}} - a^{n+1}, \tag{1.21}$$

y tomando normas:

$$\left\| 1_{\mathcal{A}} - \sum_{k=0}^{n} a^k (1_{\mathcal{A}} - a) \right\| = \left\| a^{n+1} \right\| \leq \|a\|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{1.22}$$

al tener $\|a\| \leq 1$ por hipótesis. Así,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k (1_{\mathcal{A}} - a) = 1_{\mathcal{A}}. \tag{1.23}$$

Razonando análogamente se llega a

$$\lim_{n\to\infty} (1_{\mathcal{A}} - a) \sum_{k=0}^{n} a^k = 1_{\mathcal{A}}, \tag{1.24}$$

y por la continuidad del producto (1.1) se tiene finalmente:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = (1_{\mathcal{A}} - a)^{-1}. \tag{1.25}$$

Como consecuencia, el elemento $(a - z1_{\mathcal{A}})^{-1} = -z^{-1}(1_{\mathcal{A}} - \frac{a}{z})^{-1}$ existe porque $\left\| \frac{a}{z} \right\| < 1$ cuando $|z| > \|a\|$. □

Lema 1.1.5. El conjunto de elementos invertibles de $\mathcal{A}$ es abierto en en la topología que induce la norma.

Demostración. Denotemos por $G(\mathcal{A})$ al conjunto de elementos invertibles de $\mathcal{A}$ y veamos que para todo $a \in G(\mathcal{A})$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B_{\mathcal{A}}(a, \varepsilon) \subset G(\mathcal{A})$. Dado $a \in G(\mathcal{A})$, tómese un $b \in \mathcal{A}$ tal que $\|b\| < \left\| a^{-1} \right\|^{-1}$. Por 1.1,

$$\left\| a^{-1} b \right\| \leq \left\| a^{-1} \right\| \|b\| < 1, \tag{1.26}$$

de modo que $a + b = a(1_{\mathcal{A}} + a^{-1}b)$ tiene inverso $(1_{\mathcal{A}} + a^{-1}b)^{-1}a^{-1}$ que existe por 1.26 y por el lema 1.1.4. Así, tomando $\varepsilon \leq \left\| a^{-1} \right\|^{-1}$ se tiene que $B_{\mathcal{A}}(a, \varepsilon) \subset G(\mathcal{A})$. □

Estamos ya en condiciones de demostrar los dos primeros puntos del Teorema.

Demostración.

i) El primer punto es inmediato por el lema 1.1.4.

ii) Para ver que $\sigma(a)$ es compacto basta ver que es cerrado al estar contenido en el compacto $B_{\mathbf{C}}(0,a)$ por el punto i). Veamos para ello que $\rho(a)$ es abierto para todo $a \in \mathcal{A}$.

Fijado $a \in \mathcal{A}$ definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f_a\colon & \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & z & \longmapsto & a - z1_{\mathcal{A}} \end{array} \tag{1.27}$$

que es continua pues $\|f(z+\delta) - f(z)\| = \delta$. Por el lema 1.1.5 la antiimagen por f_a del conjunto de elementos invertibles en A será un abierto en $\mathbf{C}$. Pero dicha antiimagen es el conjunto de $z \in \mathbf{C}$ tales que $a - z1_A$ tiene inverso en A i.e. $\rho(a)$. □

El hecho de que el espectro sea no vacío induce el resultado siguiente, que será esencial en la caracterización de las C^* álgebras no conmutativas.

Corolario 1.1.6 (Teorema de Gelfand-Mazur)**.** Si todo elemento de $\mathcal{A}$ distinto de cero tiene inverso, entonces $\mathcal{A} \cong \mathbf{C}$.

Demostración.

Sea $a \in \mathcal{A}$. Como $\sigma(a) \neq \emptyset$ existirá un $z_a \in \mathbf{C}$ tal que $a - z_a 1_{\mathcal{A}}$ no es invertible, de modo que $a - z_a 1_{\mathcal{A}} = 0$ y podemos construir la aplicación

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ a & \longmapsto & z_a \end{array} \tag{1.28}$$

que es claramente un isomorfismo. □

Definición 1.1.10. Dado un elemento $a \in \mathcal{A}$, se define su *radio espectral* como

$$r(a) = \sup_{z \in \sigma(a)} |z|, \tag{1.29}$$

que satisface $r(a) \leq \|a\|$ por el primer punto de 1.1.3.

1.1.5. Álgebras de Banach conmutativas

Definición 1.1.11. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa. Se llama *caracteres* a los funcionales lineales no nulos $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ tales que $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b)$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$, es decir, a los homomorfismos no nulos de $\mathcal{A}$ en $\mathbf{C}$.

Definición 1.1.12. El conjunto de los caracteres del álgebra se denomina *espacio estructural* y se denota por $\Delta(\mathcal{A})$.

Recordando cómo se definía en 0.2.1 el espacio dual de un espacio normado, es claro que el espacio estructural de $\mathcal{A}$ será un subespacio de $\mathcal{A}^*$ si los funcionales $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ son continuos en norma o, equivalentemente, si están acotados. Esto queda garantizado con el siguiente resultado.

Proposición 1.1.7. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa y con unidad $1_{\mathcal{A}}$. Entonces, para todo $\omega \in \Delta(\mathcal{A})$:

i) $\omega(1_{\mathcal{A}}) = 1$,

ii) ω es continuo con norma $\|\omega\| = 1$.

Demostración.

El primer punto es inmediato por la condición de homomorfismo: $\omega(1_{\mathcal{A}}a) = \omega(1_{\mathcal{A}})\omega(a) = \omega(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$ y como ω es no nulo existe un $a \in \mathcal{A}$ tal que $\omega(a) \neq 0$, de donde $\omega(1_{\mathcal{A}}) = 1$.

Por el primer punto del teorema 1.1.3, $a - z1_{\mathcal{A}}$ es invertible para todo $z \in \mathbf{C}$ con $|z| > \|a\|$. Así,

$$\omega(a - z1_{\mathcal{A}}) = \omega(a) - z\omega(1_{\mathcal{A}}) = \omega(a) - z \neq 0 \quad \forall\, |z| > \|a\|, \tag{1.30}$$

pues la imagen por un homomorfismo de un elemento invertible es invertible. Por tanto $|\omega(a)| \neq |z|$ $\forall z \in \mathbf{C}$ con $|z| > \|a\|$, de donde necesariamente $|\omega(a)| < \|a\|$ y

$$\|\omega\| = \sup_{a \in B_{\mathcal{A}}} |\omega(a)| \leq \sup_{a \in B_{\mathcal{A}}} \|a\| = 1, \tag{1.31}$$

luego ω es continuo y, como $\omega(1_{\mathcal{A}}) = 1$, se tiene que $\|\omega\| = 1$. $\square$

Proposición 1.1.8. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach conmutativa y con unidad, existe una correspondencia biyectiva entre los caracteres de $\mathcal{A}$ y el conjunto de sus ideales maximales.

Demostración. Si denotamos por $\mathrm{Spec}_M(\mathcal{A})$ al conjunto de ideales maximales de $\mathcal{A}$, sea la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \xi : & \Delta(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}_M(\mathcal{A}) \\ & \omega & \longmapsto & \mathrm{Ker}(\omega). \end{array} \tag{1.32}$$

Veamos que ξ está bien definida, es decir, que para todo caracter $\omega \in \Delta(\mathcal{A})$ su núcleo define un ideal maximal en $\mathcal{A}$. Como ω es continuo, su núcleo es un subespacio cerrado y, como $\dim(\Delta(\mathcal{A})/\mathrm{Ker}(\omega)) = 1$ (lo que es cierto para cualquier funcional lineal en un espacio vectorial), $\mathrm{Ker}(\omega)$ es un ideal maximal de $\mathcal{A}$. Para probar la inyectividad, sean ω_1 y ω_2 tales que $\mathrm{Ker}(\omega_1) = \mathrm{Ker}(\omega_2)$. Para aplicaciones lineales en cualquier espacio vectorial esto implica que ω_1 es un múltiplo de ω_2, pero por el primer punto de la proposición 1.1.7 necesariamente $\omega_1 = \omega_2$.

Veamos finalmente que ξ es suprayectiva, es decir, que todo ideal maximal de $\mathcal{A}$ define un elemento de $\Delta(\mathcal{A})$. Sea $\mathcal{I}$ ideal maximal de $\mathcal{A}$, luego $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ por definición. Entonces, existe un $b \in \mathcal{A} \backslash \mathcal{I}$ para el que construimos el conjunto:

$$\mathcal{I}_b = \{ab + y : a \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{I}\}, \tag{1.33}$$

que es claramente un ideal a derechas y un ideal por ser el álgebra conmutativa. Tomando $a = 0$ se tiene $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_b$ y tomando $a = 1_{\mathcal{A}}$ e $y = 0$ se tiene $b \in \mathcal{I}_b$, luego $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{I}_b$, pero $\mathcal{I}$ es maximal luego necesariamente $\mathcal{I}_b = \mathcal{A}$ para todo $b \in \mathcal{A} \backslash \mathcal{I}$. En particular $\mathcal{I}_b$ contendrá a la unidad de $\mathcal{A}$, de modo que existen $a \in \mathcal{A}$ e $y \in \mathcal{I}$ tales que $1_{\mathcal{A}} = ab + y$. Tomando clases en $\mathcal{A}/\mathcal{I}$:

$$1_{\mathcal{A}} + \mathcal{I} = (a + \mathcal{I})(b + \mathcal{I}), \tag{1.34}$$

luego $(a+\mathcal{I})^{-1} = b+\mathcal{I}$ en $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Como b era un elemento arbitrario de $\mathcal{A}\backslash\mathcal{I}$, es decir, un elemento arbitrario no nulo en $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, todo elemento no nulo de dicho cociente es invertible. Como ya hemos visto, $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ tiene estructura de álgebra de Banach con unidad, luego por el Teorema 1.1.6, existe un isomorfismo $\varphi : \mathcal{A}/\mathcal{I} \longrightarrow \mathbf{C}$. Sea ahora la aplicación:

$$\begin{array}{rccl} \omega : & \mathcal{A} & \to & \mathbf{C} \\ & a & \longmapsto & \omega(a) = \psi(a + \mathcal{I}), \end{array} \tag{1.35}$$

que es lineal por serlo ψ, no nulo porque $\omega(b) \neq 0$ y un homomorfismo:

$$\omega(a_1 a_2) = \psi(a_1 a_2 + \mathcal{I}) = \psi((a_1 + \mathcal{I})(a_2 + \mathcal{I})) = \omega(a_1)\omega(a_2), \tag{1.36}$$

por serlo ψ, luego $\omega \in \Delta(\mathcal{A})$. Por último,

$$\operatorname{Ker}(\omega) = \{a \in \mathcal{A} : \psi(a + \mathcal{I}) = 0\}, \tag{1.37}$$

pero ψ es inyectiva luego su núcleo es el elemento neutro, es decir, los $a + \mathcal{I}$ tales que $a \in \mathcal{I}$, de modo que $\operatorname{Ker}(\omega) = \mathcal{I}$. □

La proposición 1.1.7 nos garantiza así que $\Delta(\mathcal{A})$ es un subconjunto del dual $\mathcal{A}^*$. Es más, si recordamos que $(\mathcal{A}^*, w^*)$ es un espacio vectorial topológico y T_2 (observación 0.2.1), se tiene que $\Delta(\mathcal{A})$ es un subespacio topológico T_2 de $\mathcal{A}^*$ con la topología débil de subespacio $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})|_{\Delta(\mathcal{A})}$, que denominaremos *topología de Gelfand*. El resultado siguiente completa esta afirmación.

Proposición 1.1.9. Dada un álgebra de Banach conmutativa y con unidad $\mathcal{A}$, el espacio estructural $\Delta(\mathcal{A})$ es un espacio topológico compacto y T_2 con la topología de Gelfand.

Demostración.

Por lo razonado en el párrafo anterior basta ver que $\Delta(\mathcal{A})$ es débilmente compacto como subespacio. Para ello probemos primero que $\Delta(\mathcal{A})$ es w^*-cerrado viendo que $\overline{\Delta(\mathcal{A})}^{w^*} \subset \Delta(\mathcal{A})$. Sea $\omega \in \overline{\Delta(\mathcal{A})}^{w^*}$. Existe entonces una sucesión $(\omega_n)_n \subset \Delta(\mathcal{A})$ tal que

$$\omega_n \xrightarrow{w^*} \omega \Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{A} \quad \omega_n(a) \longrightarrow \omega(a). \tag{1.38}$$

Sean ahora $a, b \in \mathcal{A}$.

$$|\omega(ab) - \omega(a)\omega(b)| = |\omega(ab) - \omega_n(ab) + \omega_n(a)\omega_n(b) - \omega(a)\omega(b)| \leq \tag{1.39}$$

$$\leq |\omega(ab) - \omega_n(ab)| + |\omega_n(a)\omega_n(b) - \omega(a)\omega(b)|. \tag{1.40}$$

Por la proposición 1.1.7 $|\omega_n(a)| \leq \|a\|$ luego podemos reescribir el segundo sumando como

$$|(\omega_n(a) - \omega(a))\omega_n(b) + \omega(a)(\omega_n(b) - \omega(b))| \leq \|b\||\omega_n(a) - \omega(a)| + \|a\||\omega_n(b) - \omega(b)|, \tag{1.41}$$

que converge a 0 junto con el primer sumando de 1.40 por 1.38. Así $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b)$ y por tanto $\omega \in \Delta(\mathcal{A})$, lo que prueba que $\Delta(\mathcal{A})$ es w^*-cerrado. Finalmente, como $\|\omega\| = 1$ para todo $\omega \in \Delta(\mathcal{A})$ tenemos $\Delta(\mathcal{A}) \subset B_{\mathcal{A}^*}$, que es compacta por el Teorema de Alaoglu (0.2.2), de donde se deduce el resultado. $\square$

Tenemos en este punto que $(\Delta(\mathcal{A}), \sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})|_{\Delta(\mathcal{A})})$ es un espacio topológico compacto y T_2 para toda álgebra de Banach conmutativa y con unidad $\mathcal{A}$. El siguiente paso es considerar la copia canónica de $\mathcal{A}$ en su doble dual (8):

$$\begin{array}{rcccccc} J\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}^{**} & & & \\ & a & \longmapsto & \hat{a}\colon & \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & & & & \omega & \longmapsto & \hat{a}(\omega) = \omega(a). \end{array} \tag{1.42}$$

Ya vimos que w^* es la topología más débil para la que las aplicaciones $\hat{a}$ son continuas. Así, la topología de Gelfand es la más débil para la que las aplicaciones $\hat{a}|_{\Delta(\mathcal{A})}$ son continuas, luego

$$\begin{array}{rccc} \hat{a}|_{\Delta(\mathcal{A})}\colon & \Delta(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^* & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & \omega & \longmapsto & \omega(a) \end{array} \tag{1.43}$$

es una aplicación continua de $\Delta(\mathcal{A})$ en $\mathbf{C}$. Ye se vio que el conjunto de todas estas aplicaciones se denota $C(\Delta(\mathcal{A}))$ y es un subespacio del doble dual de $\mathcal{A}$. Si ahora restringimos 1.42 a los funcionales de $C(\Delta(\mathcal{A}))$ resulta la aplicación

$$\begin{array}{rccccc}\varphi\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & C(\Delta(\mathcal{A})) & & \\ & a & \longmapsto & \hat{a}\colon & \Delta(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & & & & \omega & \longmapsto & \hat{a}(\omega)=\omega(a),\end{array} \tag{1.44}$$

que se denomina la *transformada de Gelfand* de $\mathcal{A}$.

Como se desarrolla en la sección 1.1.2, para cualquier espacio topológico X compacto y T_2, $C(X)$ es una C^* álgebra conmutitativa y con unidad con el producto de funciones, la norma habitual de los funcionales y la aplicación conjugación compleja como involución. Por lo probado en la proposición 1.1.9, $\Delta(\mathcal{A})$ es un espacio topológico compacto y T_2, de manera que $C(\Delta(\mathcal{A}))$ es una C^* álgebra igualmente construida.

Por tanto, para toda álgebra de Banach $\mathcal{A}$ conmutativa y con unidad hemos encontrado una aplicación φ entre $\mathcal{A}$ y la C^* álgebra $C(\Delta(\mathcal{A}))$, que es además un homomorfismo claramente por construcción y por serlo los funcionales de $\Delta(\mathcal{A})$. Por el primer punto de la proposición 1.1.7, φ es también un homomorfismo unital. El siguiente resultado tiene una relevancia especial para la caracterización de las álgebras.

Teorema 1.1.10. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa y con unidad. Para cada $a \in \mathcal{A}$, la imagen de $\varphi(a) = \hat{a}$ es el espectro $\sigma(a)$ de a:*

$$\sigma(a) = \mathrm{Im}(\hat{a}) = \{\omega(a) : \omega \in \Delta(\mathcal{A})\} \quad \forall a \in \mathcal{A}. \tag{1.45}$$

Es conveniente en este punto analizar algún ejemplo que ilustre de modo práctico la construcción de una transformada de Gelfand. Un caso con bastante interés es que se presenta a continuación, construido además sobre un álgebra de Banach que ni es C^* álgebra ni tiene unidad.

Ejemplo 1.1.4. Sea $\mathcal{A} = L_1(\mathbf{R})$ con la estructura lineal y norma habituales para este espacio. Dotándole del producto de convolución

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)dy, \tag{1.46}$$

es fácil comprobar, usando el Teorema de Fubini, que $L_1(\mathbf{R})$ es un álgebra de Banach pues es asociativo y satisface $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ (1.1.5). Nótese que en la unidad de este espacio debería ser necesariamente la Delta de Dirac centrada en el cero, que no pertenece al álgebra.

Para construir la transformada hay que analizar primeramente el espacio estructural. El espacio dual de $L_1(\mathbf{R})$ es $L_\infty(\mathbf{R})$, de modo que $\Delta(L_1(\mathbf{R})) \subset L_\infty(\mathbf{R})$ y por cómo se construye la identificación isométrica entre ambos espacios, para cada $\omega \in \Delta(L_1(\mathbf{R}))$ existe un $\hat{\omega} \in L_\infty(\mathbf{R})$ tal que

$$\omega(f) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\hat{\omega}(x)dx. \tag{1.47}$$

Por la condición de homomorfismo $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b)$ de 1.47 se obtiene $\hat{\omega}(x+y) = \hat{\omega}(x)\omega\hat{(}y)$ para casi todo $x, y \in \mathbf{R}$. Esto implica que $\hat{\omega}$ ha de ser de la forma $\hat{\omega}(x) = \exp(ipx)$ para algún $p \in \mathbf{C}$. Como $\hat{\omega}$ está acotado necesariamente $p \in \mathbf{R}$ y podemos identificar así $\Delta(L_1(\mathbf{R}))$ con $\mathbf{R}$ pues diferentes p inducen diferentes funcionales. De esta manera, denotando cada funcional ω por su correspondiente p, 1.47 queda:

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{ipx}dx. \tag{1.48}$$

De modo que *la transformada de Gelfand de cada $f \in L_1(\mathbf{R})$ se corresponde con su transformada de Fourier*:

$$\begin{array}{rccccc} \varphi\colon & L_1(\mathbf{R}) & \longrightarrow & C(\mathbf{R}) & & \\ & f & \longmapsto & \hat{f}\colon & \mathbf{R} & \longrightarrow \ \mathbf{C} \\ & & & & p & \longmapsto \ \hat{f}(p) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{ipx}dx. \end{array} \tag{1.49}$$

Nótese ahora que la construcción anterior es cierta solo cuando el álgebra de Banach $\mathcal{A}$ tiene unidad, aunque este hecho interviene únicamente a la hora de probar la compacidad del espacio estructural (proposición 1.1.7), lo que se comprueba fácilmente volviendo a las demostraciones. Es natural plantearse en este momento si es posible una construcción similar para el caso de álgebras sin unidad si debilitamos las condiciones de compacidad de los espacios construidos. En efecto, si imponemos una condición menos restrictiva como la compacidad local, la transformada de Gelfand se construye de manera análoga. El proceso se resume en los párrafos sucesivos.

Definición 1.1.13. Sea X un espacio topológico T_2 y localmente compacto[1]. Se define el espacio $C_0(X)$ como el conjunto de las funciones continuas de X en $\mathbf{C}$ que se *anulan en el infinito*, es decir, tales que

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists K \subset X \ \text{ compacto tal que } \ |f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \notin K. \tag{1.50}$$

Observación 1.1.5.

i) Si X es compacto es inmediato que $C_0(X) = C(X)$.

ii) $C_0(\mathbf{R})$ es el conjunto de funciones continuas de $\mathbf{R}$ a $\mathbf{C}$ que tienden a cero para $|x| \to \infty$.

iii) $C_0(\mathbf{N}) = c_0$, que es el espacio de las sucesiones de números complejos convergentes a cero.

Una construcción análoga a la de la sección 1.1.2 prueba que $C_0(X)$ es una C^* álgebra para todo espacio topológico X localmente compacto y T_2, que sigue siendo conmutativa pero no tiene unidad, pues la aplicación identidad no se *anula en el infinito*. El siguiente resultado es la versión no unitaria de la proposición 1.1.9:

Proposición 1.1.11. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa no unital. Entonces, el espacio estructural $\Delta(\mathcal{A})$ es un espacio topológico localmente compacto y T_2 con la topología de Gelfand.

Por tanto $C_0(\Delta(\mathcal{A}))$ será en este caso una C^* álgebra conmutativa y de manera idéntica a 1.44 construimos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & C_0(\Delta(\mathcal{A})) \\ & a & \longmapsto & \hat{a}\colon \quad \begin{array}{ccc} \Delta(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \omega & \longmapsto & \hat{a}(\omega) = \omega(a), \end{array} \end{array} \tag{1.51}$$

que denominamos igualmente *transformada de Gelfand* y que vuelve a ser un homomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $C_0(\Delta(\mathcal{A}))$.

[1] Un espacio T_2 es localmente compacto si todo punto tiene un entorno compacto.

1.2. Teorema de Gelfand-Naimark

Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra conmutativa y con unidad. En este punto tenemos construido un homomorfismo dado por la transformada de Gelfand de $\mathcal{A}$ en $C(\Delta(\mathcal{A}))$. El Teorema de Gelfand-Naimark completa esta construcción afirmando que dicha correspondencia es una isometría biyectiva.

Teorema 1.2.1 (Teorema clásico de Gelfand-Naimark)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra conmutativa y con unidad. Entonces, existe un espacio topológico X compacto y T_2 tal que $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfo a $C(X)$. Además, dicho espacio X es único salvo homeomorfismo.*

El isomorfismo en cuestión es la transformada de Gelfand, de modo que el espacio topológico X es el espacio estructural $\Delta(\mathcal{A})$ con la topología de Gelfand y el isomorfismo está dado por $\varphi(a) = \hat{a}$ para todo $a \in A$. Nótese que φ es ahora un isomorfismo de C^* álgebras o $*$-isomorfismo, luego satisfará las propiedades de la definición 1.1.7. Si la C^* álgebra conmutativa $\mathcal{A}$ no tiene unidad, es de esperar que la versión equivalente del teorema 1.2.1 sea la siguiente:

Teorema 1.2.2. *Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra conmutativa sin unidad. Entonces, existe un espacio topológico X localmente compacto y T_2 tal que $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfo a $C_0(X)$. Además, dicho espacio X es único salvo homeomorfismo.*

El $*$-isomorfismo vuelve a ser ahora la transformada de Gelfand 1.51 con X el espacio estructural $\Delta(\mathcal{A})$, que ya vimos que en este caso es un e.t. localmente compacto y T_2.

El Teorema de Gelfand-Naimark establece una traducción algebraica dentro de $\mathcal{A}$ de las características geométricas y topológicas del espacio X. De esta manera, este resultado nos permitirá ir construyendo un diccionario que muestre las equivalencias entre las propiedades de un espacio topológico y las de su álgebra de funciones asociada, encontrando por ejemplo que los puntos del espacio X se corresponden con los caracteres del álgebra, los subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados con los proyectores, etc. Además, los elementos normales y hermíticos del álgebra inducirán la construcción de un cálculo funcional continuo dentro del álgebra C^* y la reformulación del concepto de norma en términos puramente algebraicos.

La propuesta de la geometría no conmutativa es extender el concepto de espacio en el caso de que tengamos una C^* álgebra no conmutativa. Dicho espacio quedará construido a partir de las propiedades topológicas y geométricas que traduce el álgebra, que al no tener caracteres no podrá, por ejemplo, dotar de puntos al espacio. Llamaremos *cuánticos* a estos espacios sin puntos, cuyas propiedades topológicas se definirán generalizando el diccionario que habíamos construido para el caso conmutativo. Igualmente, se podrá tomar un espacio *clásico* y alterar la conmutatividad de su álgebra de funciones, volviendo a una C^* álgebra no conmutativa y estudiando cómo cambian las propiedades topológicas y geométricas del espacio cuántico resultante, que será un espacio más general como una variedad.

1.2.1. Ideales en una C^* álgebra

Si $\mathcal{A}$ es una C^* álgebra conmutativa y unital, el Teorema de Gelfand-Naimark establece una correspondencia biyectiva e isométrica entre $\mathcal{A}$ y el álgebra de funciones $C(X)$, donde $X = \Delta(\mathcal{A})$ es un espacio topológico compacto y T_2. Por cómo se construye dicha correspondencia (1.44), es claro que los puntos del espacio topológico X se corresponden biunívocamente con los caracteres del álgebra $C(X)$, que a su vez están en biyección con los ideales maximales de $C(X)$ como se vio en la proposición 1.1.8. Esto nos lleva a establecer la primera correspondencia entre los puntos de X y los ideales maximales de su álgebra de funciones, dada por:

$$\begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & \mathrm{Spec}_M(C(X)) \\ x & \longmapsto & I_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}, \end{array} \tag{1.52}$$

de acuerdo a 1.44 y 1.32. Veremos a continuación que es posible extender esta biyección al conjunto de ideales del álgebra, que se corresponderá con la colección de cerrados en X. Para ello consideramos la aplicación:

$$C \longmapsto I_C = \{f \in C(X) : f(C) = 0\}, \tag{1.53}$$

que asocia a cada cerrado C un ideal I_C en $C(X)$. Nótese que esta correspondencia está bien definida para cualquier subconjunto $H \subset X$, pues

$$I_H = \{f \in C(X) : f(x) = 0 \quad \forall\, x \in H\} = \bigcap_{x \in H} I_x,$$

que es un ideal en $C(X)$ por ser intersección de ideales. No obstante, 1.53 es biyectiva únicamente cuando se restringe a la colección de cerrados en X. La suprayectividad se comprueba asignando a cada ideal I de $C(X)$ el conjunto

$$C = \{x \in X : f(x) = 0 \quad \forall\, f \in I\} = \bigcap_{f \in I} f^{-1}(\{0\}), \tag{1.54}$$

que es cerrado, pues $\{0\}$ es cerrado en $\mathbf{C}$ y las funciones de $C(X)$ son continuas. Por construcción es claro que $I \subset I_C$, luego la suprayectividad se tiene probando el otro contenido, es decir, que toda función $f \in C(X)$ que se anula en C pertenece al ideal I. Una vez comprobado, la inyectividad es inmediata.

Se ha construido así una correspondencia biunívoca entre los subconjuntos cerrados del espacio X y los ideales de su álgebra de funciones $C(X)$, donde el conjunto vacío en X se corresponde con el espacio total $C(X)$ y el conjunto total X con la aplicación constante a cero, de manera que los cerrados e ideales triviales se asocian entre sí. Notar también que esta biyección generaliza 1.52, pues en un espacio T_2 los conjuntos unipuntuales son cerrados. Además, si C_1 y C_2 son dos cerrados tales que $C_1 \subset C_2$, los ideales correspondientes satisfacen la inclusión opuesta $I_{C_2} \subset I_{C_1}$, de modo que la correspondencia es monótona: cuanto mayor sea el ideal, menor será el cerrado asociado, lo que tiene como consecuencia inmediata la caracterización de los ideales maximales a partir de los unipuntuales en X.

Si restringimos la correspondencia anterior 1.53 al conjunto de ideales primos[2] de $C(X)$ (denominado *espectro primo*), obtenemos otra biyección interesante en Geometría Algebraica: la relación entre los ideales primos de $C(X)$ y los subespacios topológicos irreducibles[3]. En efecto, si I es un ideal de $C(X)$ no primo, existirán $f, g \in I$ tales que $fg \in I$ y $f \notin I$, $g \notin I$. Si C es el cerrado asociado a I según 1.54, $C \subset \{x \in X : fg(x) = 0\}$, luego

[2]Un ideal P de un álgebra $\mathcal{A}$ se llama *primo* si, para todo $a, b \in \mathcal{A}$ tales que $ab \in P$, o bien $a \in P$ o bien $b \in P$.

[3]Un subespacio topológico es *irreducible* si no se puede expresar como unión de dos subespacios cerrados propios.

$$C = C \cap \{x \in X : fg(x) = 0\} = C \cap [\{x \in X : f(x) = 0\} \cup \{x \in X : g(x) = 0\}] =$$
$$= [C \cap \mathrm{Ker}(f)] \cup [C \cap \mathrm{Ker}(g)] = C_1 \cup C_2,$$

donde $C_1, C_2 \subset C$ son cerrados por serlo $\mathrm{Ker}(f)$ y $\mathrm{Ker}(g)$. Como $f \notin I$, existirá un $x_1 \in C$ tal que $f(x_1) \neq 0$, luego $x_1 \notin \mathrm{Ker}(f)$ y por tanto $C_1 \subsetneq C$. Análogamente se tiene $C_2 \subsetneq C$, luego hemos expresado C como unión de subespacios cerrados propios, lo que contradice su irreducibilidad. Recíprocamente, si C es un cerrado no irreducible, existen subespacios cerrados propios $C_1, C_2 \subsetneq C$ tales que $C = C_1 \cup C_2$, luego $I_C \subsetneq I_{C_1}$ y $I_C \subsetneq I_{C_2}$. Sean $f \in I_{C_1}$, $g \in I_{C_2}$. Para todo $x \in C$,

$$fg(x) = f(x)g(x) = 0 \Rightarrow fg \in I_C, \tag{1.55}$$

luego I_C no es primo y ya tenemos probado el contrarrecíproco. Notar que esta nueva correspondencia es coherente con la primera que hemos construido 1.52, pues en un álgebra todo ideal primo es maximal, y en un espacio T_2 los conjuntos unipuntuales son cerrados irreducibles.

Finalmente, estudiemos una nueva correspondencia que surge naturalmente de la que acabamos de construir. Como en un espacio topológico T_2 los subconjuntos compactos son cerrados, a todo compacto K en X le corresponderá un ideal I_K en el álgebra de funciones $C(X)$. Recordando la proposición 1.1.2, podemos construir el cociente $C(X)/I_K$, que será una C^* álgebra isomorfa a $C(K)$. Para probar esto último consideremos la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \pi\colon & C(X) & \longrightarrow & C(X)/I_K \\ & f & \longmapsto & f + I_K, \end{array} \tag{1.56}$$

que es claramente un $*$-homomorfismo. Los elementos de su imagen serán los conjuntos:

$$f + I_K = \{g \in C(X) : g - f \in I_K\} = \{g \in C(X) : (g - f)(x) = 0 \quad \forall\, x \in K\} =$$
$$= \{g \in C(X) : g(x) = f(x) \quad \forall\, x \in K\},$$

es decir, las colecciones de funciones de $C(X)$ que toman los mismos valores sobre K. Cada una definirá por tanto una función en $C(K)$, luego $C(K) = \mathrm{Im}(\pi)$ y, por el primer Teorema de isomorfía para espacios vectoriales:

$$C(X)/I_K \cong C(K). \tag{1.57}$$

Esta construcción es válida para cualquier cerrado $K \subset X$, pero por el Teorema de Gelfand-Naimark, la C^* álgebra $C(K)$ será unital si y solo si K es compacto, de manera que hemos construido una nueva correspondencia entre los subconjuntos compactos del espacio topológico y los ideales que inducen álgebras unitales al pasar al cociente.

1.2.2. Automorfismos

Veamos ahora otra consecuencia directa del Teorema, que establece que toda aplicación continua entre espacios topológicos induce un $*$-homomorfismo unital entre las álgebras asociadas.

Proposición 1.2.3. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos C^* álgebras conmutativas y con unidad, y sean X e Y los espacios topológicos asociados a través del Teorema de Gelfand-Naimark. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, f induce un $*$-homomorfismo unital de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{A}$.

Demostración. El $*$-homomorfismo viene dado por la construcción:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] & \mathcal{A} \\
C(Y) \arrow[r, "\hat{f}"] & C(X) \arrow[u, "\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}"'] \\
\hat{b} \arrow[r, mapsto] & \hat{b} \circ f,
\end{tikzcd} \tag{1.58}$$

donde $\varphi_{\mathcal{A}}$ y $\varphi_{\mathcal{B}}$ denotan las transformadas de Gelfand 1.44 para $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. El $*$-homomorifismo ϕ se escribe como la composición $\phi = \varphi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \hat{f} \circ \varphi_{\mathcal{B}}$, donde $\hat{f}(\hat{b}) = \hat{b} \circ f$ para todo $\hat{b} = \varphi_{\mathcal{B}}(b)$. Por el Teorema 1.2.1, $\varphi_{\mathcal{A}}$ y $\varphi_{\mathcal{B}}$ son $*$-isomorfismos unitales, luego basta probar que $\hat{f}$ es un $*$-homomorfismo unital.

Por un lado, $\hat{f}$ es claramente homomorfismo pues $\hat{b_1}\hat{b_2} \circ f = (\hat{b_1} \circ f)(\hat{b_2} \circ f)$ dados $\hat{b_1}, \hat{b_2} \in C(Y)$. Igualmente,

$$\hat{f}(\hat{b}^*)(x) = \hat{b}^*(f(x)) = \overline{\hat{b}(f(x))} = \overline{\hat{f}(\hat{b})(x)} = (\hat{f}(\hat{b}))^*(x), \tag{1.59}$$

luego $\hat{f}$ es un $*$-homomorfismo y, como

$$\hat{f}(1_{C(Y)}) = 1_{C(Y)} \circ f = 1_{C(X)}, \tag{1.60}$$

$\hat{f}$ es un $*$-homomorfismo unital. □

Este resultado permite establecer una nueva correspondencia entre las propiedades algebraicas de una C^* álgebra y las propiedades geométricas de su espacio topológico asociado. Si, en las condiciones de la proposición anterior, $f : X \longrightarrow X$ es un homeomorfismo, el $*$-homomorfismo inducido 1.58 será un automorfismo del álgebra asociada a X, pues la biyectividad de $\phi = \varphi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \hat{f} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ viene garantizada por la biyectividad de f. Esta correspondencia es claramente biunívoca, pues dado un $*$-homomorfismo entre C^* álgebras puede obtenerse la correspondiente aplicación continua entre los espacios topológicos asociados a partir de una construcción inversa a 1.58. En definitiva, los automorfismos del álgebra se corresponden con los homeomorfismos del espacio topológico asociado en sí mismo.

1.2.3. Proyectores

Definición 1.2.1. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra. Un elemento $p \in \mathcal{A}$ se llama *proyector* si $p^2 = p = p^*$.

Si $\mathcal{A}$ es unital, los caracteres de $\mathcal{A}$ actuando sobre un proyector solo pueden tomar los valores 0 o 1. En efecto, si $\omega \in \Delta(\mathcal{A})$,

$$\omega(p) = \omega(p^2) \Leftrightarrow \omega(p - p^2) = \omega(p(1_{\mathcal{A}} - p)) = 0 \Leftrightarrow \omega(p)\omega(1_{\mathcal{A}} - p) = 0, \tag{1.61}$$

luego o bien $\omega(p) = 0$ o bien $\omega(p) = 1$ usando que $\omega(1_{\mathcal{A}}) = 1$.

Si además $\mathcal{A}$ es conmutativa, la transformada de Gelfand 1.44 actúa sobre los proyectores como:

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ \mathcal{A} &\longrightarrow C(\Delta(\mathcal{A})) \\ p &\longmapsto \quad \hat{p}\colon \quad \begin{aligned} \Delta(\mathcal{A}) &\longrightarrow \{0,1\} \\ \omega &\longmapsto \hat{p}(\omega) = \omega(p). \end{aligned} \end{aligned} \tag{1.62}$$

Como un subconjunto E de un espacio topológico X (y su complementario) es simultáneamente abierto y cerrado si y solo si la aplicación indicadora del conjunto es continua, por ser continuos los $\hat{p} \in C(\Delta(\mathcal{A}))$ los conjuntos:

$$\{\omega \in \Delta(\mathcal{A}) : \omega(p) = 1\}, \qquad \{\omega \in \Delta(\mathcal{A}) : \omega(p) = 0\}, \tag{1.63}$$

son simultáneamente abiertos y cerrados en $\Delta(\mathcal{A})$ para cada proyector p, es decir, cada proyector del álgebra determina un par de conjuntos complementarios simultáneamente abiertos y cerrados en $\Delta(\mathcal{A})$.

Si $\mathcal{A}$ solo tiene los proyectores triviales $1_{\mathcal{A}}$ y $0_{\mathcal{A}}$, los únicos conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados en $\Delta(\mathcal{A})$ serán

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Delta(\mathcal{A}) : \omega(1_{\mathcal{A}}) = 1\} = \Delta(\mathcal{A}), &\qquad \{\omega \in \Delta(\mathcal{A}) : \omega(1_{\mathcal{A}}) = 0\} = \emptyset, \\ \{\omega \in \Delta(\mathcal{A}) : \omega(0_{\mathcal{A}}) = 1\} = \emptyset, &\qquad \{\omega \in \Delta(\mathcal{A}) : \omega(0_{\mathcal{A}}) = 0\} = \Delta(\mathcal{A}), \end{aligned}$$

suponiendo $0_{\mathcal{A}} \neq 1_{\mathcal{A}}$ para no considerar el álgebra trivial $\{0\}$ y usando que todo homomorfismo lleva el cero en el cero. Por tanto, si el álgebra solo tiene proyectores triviales los únicos conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados en $\Delta(\mathcal{A})$ son el vacío y el total, es decir, $\Delta(\mathcal{A})$ es *conexo*.

Hemos establecido así una nueva correspondencia en el diccionario de propiedades topológicas y algebraicas, en la que dada una C^* álgebra conmutativa y con unidad, la no existencia de proyectores no triviales equivale a la *conexión* del espacio topológico asociado.

1.2.4. Adjunción de unidad

Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto, T_2 y no compacto. Tomando un punto $p \notin X$, se puede dotar al conjunto $X_p = X \cup \{p\}$ de la topología:

$$\tau_p = \tau \cup \{X_p \backslash K : K \text{compacto en } (X, \tau)\}, \tag{1.64}$$

resultando un espacio topológico T_2 y compacto (X_p, τ_p), que tiene a (X, τ) por subespacio y tal que $\overline{X} = X_p$. Al espacio (X_p, τ_p) se le llama *compactificación de Alexandroff* de (X, τ) por el punto p. Viéndolo de otra manera, para todo espacio topológico $(\tilde{X}, \tau)$ compacto y T_2, la sustracción de un punto $\{p\}$ proporciona un espacio topológico T_2 y localmente compacto con la topología de subespacio, es decir, en el que los abiertos son abiertos de $\hat{X}$ sin el punto p. $(\hat{X}, \tau)$ es en este caso la compactificación de Alexandroff de $(X \backslash \{p\}, \tau|_{X \backslash \{p\}})$.

En esta sección se pretende probar que la compactificación de un espacio topológico T_2 y localmente compacto corresponde a la adjunción de unidad en el álgebra asociada, que será una C^* álgebra unital de acuerdo al teorema 1.2.2. Esto equivale a demostrar el siguiente resultado.

Proposición 1.2.4. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra conmutativa y sin unidad. Entonces, el espacio estructural de su unitización es la compactificación de Alexandroff de su espacio estructural por un punto p:

$$\Delta(\mathcal{A}_{\mathbb{I}}) = \Delta(\mathcal{A}) \cup \{p\}. \tag{1.65}$$

Demostración. Veamos en primer lugar la igualdad de los conjuntos 1.65. Todo caracter $\omega \in \Delta(\mathcal{A})$ define un caracter en $\Delta(\mathcal{A}_{\mathbb{I}})$ como:

$$\tilde{\omega}(a + \lambda) = \omega(a) + \lambda \quad \forall\, a \in \mathcal{A}, \tag{1.66}$$

que es claramente un caracter en $\Delta(\mathcal{A}_{\mathbb{I}})$ tal y como se ha definido en 1.4 el producto en $\mathcal{A}_{\mathbb{I}}$. Esta extensión es, además, única. El caracter p se define como:

$$p(a + \lambda) = \lambda \quad \forall\, a \in \mathcal{A},$$

de manera que ya se tiene $\Delta(\mathcal{A}) \cup \{p\} \subset \Delta(\mathcal{A}_{\mathbb{I}})$. El otro contenido es inmediato, pues si existiera un $\hat{\omega} \in \Delta(\mathcal{A}_{\mathbb{I}})$ tal que no fuera extensión de ningún caracter de $\Delta(\mathcal{A})$, su restricción a $\mathcal{A}$ sí definiría un caracter en $\Delta(\mathcal{A}_{\mathbb{I}})$ según 1.66, que es único y por tanto ha de ser igual a $\hat{\omega}$.

Habiendo probado la igualdad de conjuntos 1.65 falta probar que las estructuras topológicas son las mismas. De acuerdo al razonamiento de los primeros párrafos de esta sección, basta con comprobar que la topología de Gelfand de $\Delta(\mathcal{A}_{\mathbb{I}})$ restringida al subespacio $\Delta(\mathcal{A})$ coincide con la topología de Gelfand de $\Delta(\mathcal{A})$ en sí. Para ello hay que tener en cuenta que una base de la topología de Gelfand para el espacio estructural $\Delta(\mathcal{A})$ está dada por los conjuntos:

$$\hat{a}^{-1}(O) = \{\omega \in \Delta(\mathcal{A}) : \omega(a) \in O\}, \tag{1.67}$$

donde $a \in \mathcal{A}$ y O es un abierto en $\mathbf{C}$. Así, como $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mathbb{I}}$, todo abierto en $\Delta(\mathcal{A})$ es la restricción de algún abierto en $\Delta(\mathcal{A}_{\mathbb{I}})$. Finalmente, por 1.66:

$$\{\tilde{\omega} \in \Delta(\mathcal{A}_{\mathbb{I}}) : \tilde{\omega}(a+\lambda) \in O\} \backslash \{p\} = \{\omega \in \Delta(\mathcal{A}) : \omega(a) \in O - \lambda\}, \tag{1.68}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbf{C}$ y O abierto en $\mathbf{C}$, lo que prueba, junto con 1.67, que la restricción en $\Delta(\mathcal{A})$ de cualquier abierto de $\Delta(\mathcal{A}_{\mathbb{I}})$ es un abierto en la topología de Gelfand de $\Delta(\mathcal{A})$. $\square$

1.2.5. Elementos normales y hermíticos

Dada una C^* álgebra $\mathcal{A}$ y un elemento $a \in \mathcal{A}$, denotaremos por $C^*(a)$ a la *subálgebra* de $\mathcal{A}$ generada por a, es decir, a la clausura del subespacio generado por a y a^*. Volveremos ahora al caso en el que $\mathcal{A}$ es una C^* álgebra no conmutativa (aunque sí unital) y analizaremos sus propiedades a través del estudio de sus subálgebras conmutativas.

Definición 1.2.2. Se dice que un elemento $a \in \mathcal{A}$ es *normal* si $[a, a^*] = 0$, donde $[x, y] = xy - yx$ es el *conmutador* de x e y. Si además $a = a^*$, el elemento a se llama *hermítico*.

La propiedad crucial de los elementos normales es que las subálgebras que generan son conmutativas. En particular, si a es hermítico la subálgebra $C^*(a, 1_{\mathcal{A}})$ es la clausura del espacio de polinomios con coeficientes en $\mathbf{C}$ y con indeterminada igual a a.

Teorema 1.2.5. *Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra unital y sea $a \in \mathcal{A}$ un elemento hermítico. Entonces,*

i) El espectro de a en $\mathcal{A}$ coincide con el espectro de a en la subálgebra $C^*(a, 1_{\mathcal{A}})$, de modo que podemos hablar sin ambigüedad del espectro $\sigma(a)$.

ii) El espectro de a es real.

iii) El espacio estructural de la subálgebra es homeomorfo al espectro de a, luego la subálgebra $C^*(a, 1_{\mathcal{A}})$ es isomorfa a $C(\sigma(a))$. Bajo este isomorfismo, la imagen de la transformada de Gelfand de a, $\hat{a} : \sigma(a) \longrightarrow \mathbf{R}$ es la aplicación identidad en $\sigma(a)$.

Demostración.

i) Por definición es claro que $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset \sigma_{C^*(a,1_{\mathcal{A}})}(a)$, luego probaremos el otro contenido viendo que $\rho_{\mathcal{A}}(a) \subset \rho_{C^*(a,1_{\mathcal{A}})}(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$ hermítico.

Sea a invertible y normal en $\mathcal{A}$ y sea la subálgebra $C^*(a, a^{-1})$ generada por a y por su inverso. Es fácil ver que $(a^{-1})^* = (a^*)^{-1}$ y que a, a^*, a^{-1} y $(a^*)^{-1}$ conmutan entre ellos, luego la subálgebra $C^*(a, a^{-1})$ es conmutativa y unital, y por el Teorema de Gelfand-Naimark será isomorfa a $C(X)$ para un único espacio topológico compacto y T_2 X. Puesto que a es invertible y la transformada de Gelfand un isomorfismo, $\hat{a}$ será invertible en $C(X)$, lo que se traduce en $\hat{a}(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Para cualquier $f \in C(X)$ no nula en ningún punto podemos escribir:

$$0 < \frac{ff^*}{\|f\|^2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \left\| 1_{C(X)} - \frac{ff^*}{\|f\|^2} \right\| < 1. \tag{1.69}$$

Por el lema 1.1.4 aplicado al elemento $1_{C(X)} - ff^* \|f\|^{-2}$ del álgebra $C(X)$, la suma siguiente converge al inverso de f en $C(X)$:

$$f^{-1} = \frac{f^*}{\|f\|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1_{C(X)} - \frac{ff^*}{\|f\|^2} \right)^k, \tag{1.70}$$

para todo $f \in C(X)$ no nulo. En particular, para $\hat{a}$ tendremos que $\hat{a}^{-1}$ es límite de una secuencia de polinomios en $\hat{a}$ y $\hat{a}^*$, luego aplicando la transformada de Gelfand inversa a^{-1} será límite de una secuencia de polinomios en a y en a^*, es decir, $a^{-1} \in C^*(a, 1_{\mathcal{A}})$ y por tanto $C^*(a, a^{-1}) = C^*(a, 1_{\mathcal{A}})$.

Si a es normal, $a - 1_{\mathcal{A}}z$, con $z \in \mathbf{C}$, también lo será, luego por el razonamiento anterior aplicado a este elemento, si existe $(a - 1_{\mathcal{A}}z)^{-1} \in \mathcal{A}$, dicho inverso caerá necesariamente en $C^*(a - 1_{\mathcal{A}}z, 1_{\mathcal{A}}) = C^*(a, 1_{\mathcal{A}})$, de modo que $\rho_{\mathcal{A}}(a) \subset \rho_{C^*(a,1_{\mathcal{A}})}(a)$.

ii) Sea a hermítico y sea $\omega \in \Delta(\mathcal{A})$, con $\omega(a) = \alpha + i\beta$ donde α, $\beta \in \mathbf{R}$. El elemento $b = a - 1_{\mathcal{A}}\alpha$ es hermítico por serlo a y satisface $\omega(b) = \omega(a) - \alpha = i\beta$. Para $t \in \mathbf{R}$ se tiene:

$$|\omega(b + it1_{\mathcal{A}})|^2 = |i\beta + it|^2 = \beta^2 + 2t\beta + t^2. \tag{1.71}$$

Por otro lado, usando el punto (*ii*) de 1.1.7 y 1.9:

$$\begin{aligned} |\omega(b + it1_{\mathcal{A}})|^2 \leq \|b + it1_{\mathcal{A}}\|^2 = \|(b + it1_{\mathcal{A}})(b + it1_{\mathcal{A}})^*\| = \|(b + it1_{\mathcal{A}})(b - it1_{\mathcal{A}})\| = \\ = \left\|b^2 + t^2\right\| \leq \|b\|^2 + t^2. \end{aligned}$$

Combinando 1.71 con lo anterior se tiene $\beta^2 + 2t\beta \leq \|b\|^2$, lo que no es posible para $\beta > 0$ ni para $\beta < 0$ repitiendo el mismo argumento para $-b$. Así, necesariamente $\beta = 0$ y por tanto $\hat{a}$ tomará valores reales siempre que $a = a^*$. Por 1.1.10, la imagen de $\hat{a}$ coincide con el espectro $\sigma(a)$, lo que concluye la prueba.

iii) Si a es normal la subálgebra $C^*(a, 1_{\mathcal{A}})$ es conmutativa y unital y por tanto isomorfa a $C(X)$, donde $X = \Delta(C^*(a, 1_{\mathcal{A}}))$. Por 1.1.10, la imagen de a por la transformada de Gelfand es una aplicación suprayectiva de X en $\sigma(a)$, cuya continuidad se tiene porque $\hat{a} \in C(X)$. Probando la inyectividad y la continuidad de la inversa ya se tiene que $\Delta(C^*(a, 1_{\mathcal{A}}))$ es homeomorfo a $\sigma(a)$, luego $C(\Delta(C^*(a, 1_{\mathcal{A}}))) \cong C^*(a, 1_{\mathcal{A}})$ será isomorfo a $C(\sigma(a))$. La última afirmación de este punto es inmediata:

$$\begin{aligned} C^*(a, 1_{\mathcal{A}}) \colon \quad &\longrightarrow \quad C(\sigma(a)) \\ a \quad &\longmapsto \quad \hat{a} = \mathrm{Id}_{\sigma(a)}. \end{aligned} \tag{1.72}$$

$\square$

Corolario 1.2.6. Para cada elemento hermítico $a \in \mathcal{A}$ y cada $f \in C(\sigma(a))$ existe un elemento $f(a) \in C^*(a, 1_{\mathcal{A}})$ tal que

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)); \tag{1.73}$$

$$\|f(a)\| = \|f\|. \tag{1.74}$$

El elemento $f(a)$ es la expresión obvia cuando f es un polinomio y en otro caso se construye mediante la aproximación polinomial de la aplicación $f : \sigma(a) \longrightarrow \mathbf{R}$.

Demostración. Por el tercer punto del teorema 1.2.5 cada $f \in C(\sigma(a))$ tiene asignado vía isomorfismo un elemento $f(a) \in C^*(a, 1_{\mathcal{A}})$. Como dicho isomorfismo se construye a partir de la transformada de Gelfand será una isometría, lo que prueba 1.74. El primer punto 1.73 se obtiene por 1.1.10: $\sigma(f(a)) = \mathrm{Im}(\hat{f(a)}) = \mathrm{Im}(f) = f(\sigma(a))$. □

Corolario 1.2.7. La norma de una C^* álgebra es única.

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A}$ un elemento hermítico. El isomorfismo 1.72 es también una isometría por estar construido sobre la transformada de Gelfand, de manera que $\left\|\mathrm{Id}_{\sigma(a)}\right\| = \|a\|$. Pero por como está definida la norma en el espacio $C(\sigma(a))$:

$$\left\|\mathrm{Id}_{\sigma(a)}\right\| = \sup_{z \in \sigma(a)} |z| = r(a), \tag{1.75}$$

luego para todo elemento hermítico a se tiene $r(a) = \|a\|$. Si a es cualquier elemento de $\mathcal{A}$, aa^* es hermítico por las propiedades de la involución. Además, por 1.9 $\|aa^*\| = \|a\|^2$, de modo que:

$$\|a\| = \sqrt{r(aa^*)}, \tag{1.76}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. □

Como el espectro de un elemento del álgebra viene determinado únicamente por su estructura algebraica, este resultado concluye que la norma de toda C^* álgebra queda determinada por su estructura algebraica, es decir, dada una C^* álgebra $\mathcal{A}$, no existe otra norma para la cual $\mathcal{A}$

mantenga la estructura de C^* álgebra. Algunas consecuencias inmediatas se recogen en los corolarios siguientes.

Corolario 1.2.8. Todo $*$-homomorfismo entre C^* álgebras es continuo.

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos C^* álgebras y sea $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un $*$-homomorfismo. Vamos a probar que $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$, y por tanto que φ es continuo.

Dado $z \in \rho(a)$, como $(a - 1_{\mathcal{A}}z)^{-1}$ existe en $\mathcal{A}$, su imagen por el homomorfismo φ será invertible en $\mathcal{B}$, con $\varphi((a - 1_{\mathcal{A}}z)^{-1}) = (\varphi(a - 1_{\mathcal{A}}z)^{-1}$. Así, $\rho(a) \subset \rho(\varphi(a))$ y por tanto:

$$\sigma(\varphi(a)) \subset \sigma(a), \tag{1.77}$$

y así $r(\varphi(a)) \leq r(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Por 1.76 el resultado es inmediato. □

Lema 1.2.9. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos C^* álgebras y $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un $*$-homomorfismo. Entonces, para todo elemento hermítico $a \in \mathcal{A}$ y todo $f \in C(\sigma(a))$ se satisface

$$f(\varphi(a)) = \varphi(f(a)), \tag{1.78}$$

donde $f(\varphi(a))$ y $f(a)$ están definidos según el corolario 1.2.6.

Lema 1.2.10 (Urysohn)**.** Un espacio topológico X es normal[4] si y solo si todo par de subconjuntos cerrados disjuntos A y B pueden ser separados por una función, es decir, si y solo si existe $f : X \longrightarrow [0, 1]$ continua tal que $f(A) = \{1\}$ y $f(B) = \{0\}$.

Corolario 1.2.11. Todo $*$-homomorfismo inyectivo entre C^* álgebras es una isometría.

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos C^* álgebras y $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un $*$-homomorfismo inyectivo entre ellas. Supongamos que existe un $a \in \mathcal{A}$ tal que $\|\varphi(a)\| \neq \|a\|$. Por 1.9 y 1.1.7 esto implica que $\|\varphi(aa^*)\| \neq \|aa^*\|$ y, usando 1.76 para aa^* y $\varphi(aa^*)$ se tiene:

$$\sup_{z\in\sigma(aa^*)} |z| \neq \sup_{z\in\sigma(\varphi(aa^*))} |z| \Rightarrow \sigma(aa^*) \neq \sigma(\varphi(aa^*)), \tag{1.79}$$

[4]Se dice que un espacio topológico X es *normal* si para todo par de cerrados disjuntos U, V, existen cerrados disjuntos $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ tales que $U \subset \tilde{U}$ y $V \subset \tilde{V}$.

lo que por 1.77 se traduce en $\sigma(\varphi(a)) \subsetneq \sigma(a)$.

Todo espacio topológico compacto y T_2 es normal, luego por el tercer punto del teorema 1.2.5 podemos aplicar el lema 1.2.10 a $\sigma(a)$. Existe así $f \in C(\sigma(a))$ tal que $f(\sigma(\varphi(a))) = \{0\}$, luego su imagen por el isomorfismo del corolario 1.2.6 será $f(\varphi(a)) = 0$. Pero por el lema 1.2.9 $\varphi(f(a)) = 0$, lo que contradice la inyectividad de φ. $\square$

Corolario 1.2.12. La imagen de un $*$-homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es cerrada y, en particular, una subálgebra de $\mathcal{B}$.

Demostración. Por el primer Teorema de Isomorfía para espacios vectoriales, existe un isomorfismo $\psi : \mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow \mathcal{B}$ que es, además, una aplicación inyectiva. El espacio cociente $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\varphi)$ es una C^* álgebra, luego por 1.2.11 ψ será una isometría y, en particular, tendrá rango cerrado. La imagen de una C^* álgebra por un $*$-homomorfismo es una $*$-álgebra que, como es cerrada en la norma de $\mathcal{B}$, forma una subálgebra. $\square$

Capítulo 2

Representaciones y estados

La construcción de una formulación algebraica de la Mecánica Cuántica hace indispensable la caracterización en términos de C^* álgebras del concepto de estado que, junto con el de observable, constituye los pilares de cualquier teoría física. El marco matemático de los operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert que plantea la formulación usual quedará extendido al contexto algebraico por medio del teorema de Gelfand Naimark y las representaciones GNS, una herramienta que permite representar canónicamente una C^* álgebra preservando su comportamiento esencial. Desarrollaremos en este capítulo la Teoría de estados y representaciones, analizando las correspondencias que surgen con el caso conmutativo y construyendo las herramientas necesarias de cara a la formulación de la Mecánica Cuántica, que nos servirán de igual manera para resaltar el interés intrínseco que tiene la Teoría de C^* álgebras desde el punto de vista matemático.

2.1. Elementos positivos

Clásicamente, se dice que una función $f \in C(X)$ para cualquier espacio X es *positiva* cuando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Esta noción se aplica, en particular, a los elementos de la C^* álgebra conmutativa $C_0(X)$, donde X es un espacio topológico localmente compacto y T_2, de manera que el concepto de *positividad* puede definirse para ciertas C^* álgebras concretas. Se buscará en esta sección construir una generalización para cualquier C^* álgebra arbitraria, ya que la positividad jugará un papel determinante en la Teoría de estados y representaciones.

Definición 2.1.1. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra. Un elemento $a \in \mathcal{A}$ se llama *positivo* si es hermítico y su espectro es positivo. El conjunto de todos los elementos positivos de $\mathcal{A}$ se denota por $\mathcal{A}^+$.

Observación 2.1.1. Nótese que la definición anterior es, efectivamente, una generalización de la noción de positividad para los elementos de $C(X)$. Si $f \in C(X)$, f es hermítico si y solo si toma valores reales. Además, su espectro está dado por su imagen:

$$z \in \sigma(f) \Leftrightarrow \nexists (f - 1_{C(X)}z)^{-1} \Leftrightarrow \exists\, x \in X : (f - 1_{C(X)}z)(x) = f(x) - z = 0 \Leftrightarrow z \in \mathrm{Im}(f),$$

de manera que $f \in C(X)$ es un elemento positivo si y solo si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$.

Otra de las nociones de positividad que esta definición pretende generalizar es la relativa a los operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert (ver sección 1.1.3). Un elemento $T \in \mathcal{B}(H)$ se llama positivo si $\langle x\,, Tx\rangle \geq 0$ para todo $x \in H$, lo que en Mecánica Cuántica significa que el valor esperado del observable T es siempre positivo. Para probar que la definición 2.1.1 generaliza igualmente esta noción hay que construir una nueva caracterización de los elementos positivos, que supone el resultado central de esta sección y cuya prueba requiere de los lemas siguientes.

Lema 2.1.1. Todo elemento hermítico de una C^* álgebra $\mathcal{A}$ se puede descomponer como $a = a^+ - a^-$, donde $a^+, a^- \in \mathcal{A}^+$ y $a^+a^- = 0$.

Lema 2.1.2. Si $\mathcal{A}$ es una C^* álgebra y $a \in \mathcal{A}$ es tal que $-a^*a \in \mathcal{A}^+$, entonces $a = 0$.

Teorema 2.1.3. *El conjunto de elementos positivos de una C^* álgebra $\mathcal{A}$ está dado por:*

$$\mathcal{A}^+ = \{a^2 : a \in \mathcal{A} \text{ es hermítico}\} = \{aa^* : a \in \mathcal{A}\}. \tag{2.1}$$

Demostración. Probemos en primer lugar la primera igualdad, por doble contenido. Si $a \in \mathcal{A}^+$, la aplicación

$$\begin{aligned} f \colon \ \sigma(a) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ z &\longmapsto \sqrt{z} \end{aligned} \tag{2.2}$$

define un elemento $f(a) = \sqrt{a}$ en la subálgebra $C^*(a)$ de acuerdo al corolario 1.2.6 dado por la aproximación polinomial de f evaluada en a. Dicho elemento es hermítico por estar en $C^*(a)$ y satisface $(\sqrt{a})^2 = a$, de manera que todo elemento positivo de $\mathcal{A}$ se escribe como el cuadrado de un elemento hermítico de $\mathcal{A}$. Recíprocamente, si $a \in \mathcal{A}$ es un elemento hermítico, a^2 será también hermítico y, considerando ahora la aplicación $g(z) = z^2$, por 1.73 se tiene que:

$$\sigma(a^2) = \sigma(g(a)) = g(\sigma(a)) = (\sigma(a))^2 \geq 0, \tag{2.3}$$

luego queda probada la primera igualdad, de manera que el contenido $\mathcal{A}^+ \subset \{aa^* : a \in \mathcal{A}\}$ es trivial. Para probar el contenido inverso, aplicamos el lema 2.1.1 al elemento $b = a^*a$, que es hermítico:

$$(b^-)^3 = -b^-(b^+ - b^-)b^- = -b^-bb^- = -b^-a^*ab^- = -(ab^-)^*ab^-. \tag{2.4}$$

Como $\sigma(b^-) \geq 0$ al ser b^- positivo, por 1.73 con $f(t) = t^3$ se tiene que $\sigma((b^-)^3) \geq 0$ y, como también es hermítico, que $(b^-)^3$ es positivo. Por el desarrollo 2.4, el elemento $-(ab^-)^*ab^-$ también lo será, luego por el lema 2.1.2 necesariamente $ab^- = 0$. De nuevo por 2.4 se tiene que $(b^-)^3 = 0$, luego $b^- = 0$ aplicando 1.2.6 a la función $f(t) = t^{1/3}$. Así, $b = a^*a = b^+ \in \mathcal{A}^+$. $\square$

2.2. Estados de una C^* álgebra

El concepto de estado en el sentido que aquí se presenta surge de la Mecánica Cuántica. No obstante, los estados tienen una relevancia propia en la Teoría de las C^* álgebras abstractas.

Definición 2.2.1. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra con unidad. Un *estado* en $\mathcal{A}$ es una aplicación lineal $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ satisfaciendo:

i) $\omega(a) \in \mathbf{R}$, $\omega(a) \geq 0 \quad \forall\, a \in \mathcal{A}^+$ (*positividad*),

ii) $\omega(1_{\mathcal{A}}) = 1$ (*normalización*).

El conjunto de todos los estados en $\mathcal{A}$ se denomina *espacio de estados* y se denota por $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Ejemplo 2.2.1. Considerando la C^* álgebra de los operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert, $\mathcal{B}(H)$, cada elemento $\psi \in H$ define un estado en $\mathcal{B}(H)$ como la aplicación:

$$\begin{array}{rccl} \psi: & \mathcal{B}(H) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & T & \longmapsto & \psi(T) = \langle \psi \,, T\psi \rangle. \end{array} \tag{2.5}$$

La linealidad y normalización son inmediatas y la positividad se prueba usando el teorema 2.1.3:

$$\psi(T^*T) = \langle \psi \,, T^*T\psi \rangle = \langle T\psi \,, T\psi \rangle = \|T\Psi\|^2 \geq 0 \quad \forall\, T \in \mathcal{B}(H). \tag{2.6}$$

Observación 2.2.1. En las condiciones de la definición 2.2.1, todo funcional lineal positivo $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ -en particular todo estado en $\mathcal{A}$- define un producto pre-escalar en $\mathcal{A}$, esto es, un aplicación $\langle \cdot \,, \cdot \rangle : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ que satisface únicamente los axiomas (i), (iii) y (iv) de la definición 0.1.6. Este producto está dado por:

$$\langle a \,, b \rangle_\omega = \omega(a^*b) \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A}, \tag{2.7}$$

y satisface igualmente la desigualdad de Cauchy-Schwarz (4), lo que se traduce en:

$$|\omega(a^*b)|^2 \leq \omega(a^*a)\, \omega(b^*b) \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A}. \tag{2.8}$$

Además, por el axioma (iii) de la definición 0.1.6 se tiene que:

$$\omega(a^*) = \omega(a^* 1_{\mathcal{A}}) = \overline{\langle 1_{\mathcal{A}}, a \rangle_\omega} = \overline{\omega(a)} \quad \forall\, a \in \mathcal{A}. \tag{2.9}$$

Observación 2.2.2. El conjunto de los elementos positivos de una C^* álgebra $\mathcal{A}$ permite definir en ella una relación de orden parcial y lineal $\leq$ como:

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathcal{A}^+ \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A}. \tag{2.10}$$

Todo funcional lineal y positivo $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ conserva el orden anterior. Dados $a, b \in \mathcal{A}$:

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathcal{A}^+ \Rightarrow \omega(b - a) = \omega(b) - \omega(a) \geq 0 \Rightarrow \omega(a) \leq \omega(b). \tag{2.11}$$

Como consecuencia del Teorema 2.1.3, este orden se conserva igualmente para los elementos hermíticos bajo conjugación arbitraria de elementos de $\mathcal{A}$. En efecto, sean a_1, $a_2 \in \mathcal{A}$ hermíticos y $b \in \mathcal{A}$. Como $a_2 - a_1 \in \mathcal{A}^+$ existe un $a_3 \in \mathcal{A}$ tal que $a_2 - a_1 = a_3^* a_3$. Pero el elemento $(a_3 b)^*(a_3 b)$ es positivo, luego:

$$(a_3 b)^*(a_3 b) = b^*(a_2 - a_1)^*(a_2 - a_1)b \in \mathcal{A}^+ \Leftrightarrow b^* a_2 b - b^* a_1 b \in \mathcal{A}^+ \Leftrightarrow b^* a_1 b \leq b^* a_2 b. \tag{2.12}$$

Teorema 2.2.1. *Sea X un espacio topológico compacto y T_2. El espacio de estados de la C^* álgebra unital $C(X)$ es el conjunto de las medidas de probabilidad sobre X.*

Demostración. Cada estado $\omega \in \mathcal{S}(C(X))$ es, en particular, un funcional lineal y positivo sobre $C(X)$. Así, por el Teorema de Representación de Riesz (0.3.1), para cada estado ω existe una σ-álgebra Σ y una medida $\mu_\omega : \Sigma \longrightarrow [0, \infty)$ tales que (X, Σ, μ) es un espacio de medida y

$$\omega(f) = \int_X f d\mu_\omega \quad \forall\, f \in C(X), \tag{2.13}$$

es decir, todo estado $\omega \in \mathcal{S}(C(X))$ determina una medida μ_ω sobre X, que es una medida de probabilidad al estar normalizado el estado:

$$\omega(1_{C(X)}) = \int_X d\mu_\omega = \mu_\omega(X) = 1. \tag{2.14}$$

Recíprocamente, toda medida de probabilidad μ define un funcional ω_μ sobre $C(X)$ a partir de la relación 2.13, que estará normalizado por 2.14 y, por las propiedades de la integral de Lebesgue, será lineal y satisfará:

$$\omega_\mu(f) = \int_X f d\mu \geq \int_X 0 d\mu = 0 \quad \forall\, f \geq 0, \tag{2.15}$$

luego será positivo y por tanto un elemento de $\mathcal{S}(C(X))$. □

El resultado anterior establece que, dada una C^* álgebra conmutativa y unital $\mathcal{A}$, el espacio de estados $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ es el conjunto de las medidas de probabilidad sobre el espacio clásico X dado por el Teorema de Gelfand-Naimark.

Proposición 2.2.2. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra unital. Una aplicación lineal $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ es positiva si y solo si está acotada y satisface $\|\omega\| = \omega(1_{\mathcal{A}})$.

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ lineal y positiva y consideremos en primer lugar $a \in \mathcal{A}$ hermítico, luego $\sigma(a) \subset \mathbf{R}$. La aplicación:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \sigma(a) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & t & \longmapsto & \sqrt{t + |t|}, \end{array} \tag{2.16}$$

está bien definida y su imagen es real por serlo $\sigma(a)$. Por el isomorfismo del corolario 1.2.6, f define un elemento $f(a) = \sqrt{a + \|a\| 1_{\mathcal{A}}}$ en $C^*(a, 1_{\mathcal{A}})$, que será hermítico por estar en la subálgebra y que verifica:

$$(f(a))^2 = a + \|a\| 1_{\mathcal{A}}, \tag{2.17}$$

luego por el Teorema 2.1.3 $a + \|a\| 1_{\mathcal{A}}$ es un elemento positivo. Análogamente se prueba que $a - \|a\| 1_{\mathcal{A}}$ también lo es. De acuerdo a la relación de orden definida en 2.10, se tiene entonces:

$$-\|a\| 1_{\mathcal{A}} \leq a \leq \|a\| 1_{\mathcal{A}}, \tag{2.18}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ hermítico. Al ser ω lineal y positivo por hipótesis, por 2.11 resulta:

$$-\|a\|\omega(1_{\mathcal{A}}) \leq \omega(a) \leq \|a\|\omega(a) \Leftrightarrow |\omega(a)| \leq \|a\||\omega(1_{\mathcal{A}})| = \|a\|\omega(1_{\mathcal{A}}). \tag{2.19}$$

Sea ahora $b \in \mathcal{A}$ cualquiera. Usando 2.8 para b y $1_{\mathcal{A}}$ y 2.19 al ser b^*b hermítico:

$$|\omega(b)|^2 \leq \omega(b^*b)\omega(1_{\mathcal{A}}) \leq \|b^*b\|\omega(1_{\mathcal{A}})^2 = \|b\|^2\omega(1_{\mathcal{A}})^2, \tag{2.20}$$

de manera que $|\omega(a)| \leq \|a\|\omega(1_{\mathcal{A}})$ para todo $a \in \mathcal{A}$, lo que prueba que ω es acotado y, por tanto, continuo. La normalización de ω es inmediata a partir de la cota anterior:

$$\|\omega\| = \sup_{a \in \mathcal{A}} \frac{|\omega(a)|}{\|a\|} = \omega(1_{\mathcal{A}}). \tag{2.21}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea ahora $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ lineal, acotado y tal que $\|\omega\| = \omega(1_{\mathcal{A}})$. Para ver que es positivo hay que probar que $\omega(a) \in \mathbf{R}$ y $\omega(a) \geq 0$ para todo $a \in \mathcal{A}^+$. Sea $a \in \mathcal{A}^+$. Escribiendo $\omega(a) = \alpha + i\beta$ y razonando con la continuidad de ω se llega a que $\beta = 0$ necesariamente, luego falta ver que $\omega(a) \geq 0$. Para ello, tómese un $s > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $\|1_{\mathcal{A}} - sa\| \leq 1$. Asumiendo que ω toma valores no nulos:

$$1 \geq \|1_{\mathcal{A}} - sa\| = \frac{\|\omega\|}{\omega(1_{\mathcal{A}})}\|1_{\mathcal{A}} - sa\| \geq \frac{|\omega(1_{\mathcal{A}}) - sa|}{\omega(1_{\mathcal{A}})}, \tag{2.22}$$

luego $|\omega(1_{\mathcal{A}}) - s\omega(a)| \leq \omega(1_{\mathcal{A}})$, que solo es posible cuando $\omega(a) \geq 0$. □

Observación 2.2.3. De la demostración anterior podemos extraer una relación que será de utilidad posteriormente. De acuerdo a 2.18, para todo $a \in \mathcal{A}$ se tiene:

$$-\|a^*a\|1_{\mathcal{A}} \leq a^*a \leq \|a^*a\|1_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow -\|a\|^2 1_{\mathcal{A}} \leq a^*a \leq \|a\|^2 1_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow a^*a \leq \|a\|^2 1_{\mathcal{A}}. \tag{2.23}$$

Como hemos visto, la relación de orden entre elementos hermíticos se conserva bajo conjugación por elementos de $\mathcal{A}$, luego concluimos que:

$$b^*a^*ab \leq \|a\|^2 b^*b \tag{2.24}$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$.

Observación 2.2.4. De acuerdo a la proposición anterior, un estado en una C^* álgebra unital es acotado y tiene norma igual a 1. Por tanto, los estados son funcionales lineales y continuos y el espacio de estados es entonces un subconjunto del dual $\mathcal{A}^*$. Recíprocamente, todo $\omega \in \mathcal{A}^*$ tal que $\|\omega\| = \omega(1_{\mathcal{A}}) = 1$ será un estado en $\mathcal{A}$. De acuerdo a las propiedades de $\Delta(\mathcal{A})$ vistas en 1.1.7, el espacio estructural del álgebra es también un subconjunto del espacio de estados, lo que justifica la notación empleada. Se tiene entonces la siguiente relación de contención, para toda C^* álgebra unital $\mathcal{A}$:

$$\Delta(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^*, \tag{2.25}$$

donde el primer contenido distingue únicamente la condición de homomorfismo (no nulo).

El objetivo ahora es extender el concepto de estado a las C^* álgebras no unitales. Para ello, generalizamos en un primer lugar la noción de positividad a las aplicaciones entre C^* álgebras.

Definición 2.2.2. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos C^* álgebras y sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación lineal. Se dice que F es *positiva* si $F(a) \in \mathcal{B}^+$ para todo $a \in \mathcal{A}^+$.

Proposición 2.2.3. Toda aplicación lineal positiva entre C^* álgebras es continua.

Demostración. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dos C^* álgebras y $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación. Probemos en primer lugar que si F esta acotada en $\mathcal{A}^+$ entonces lo está en $\mathcal{A}$. Todo $a \in \mathcal{A}$ puede escribirse como $a = a' + ia''$ donde a' y a'' son hermíticos. Por el lema 2.1.1, todo elemento hermítico se puede descomponer a su vez como diferencia de elementos positivos, luego podemos escribir:

$$a = a'_+ - a'_- + ia''_+ - ia''_-, \tag{2.26}$$

donde todos los elementos a la derecha de la igualdad son positivos. Como $\|a'\| \leq \|a\|$ y $\|a''\| \leq \|a\|$, se tiene que $\|b\| \leq \|a\|$ donde $b = a'_+, a'_-, a''_+, a''_-$. Así, si $\|F(b)\| \leq M\|b\|$, con $M > 0$ para todo $b \in \mathcal{A}^+$, entonces:

$$\|F(a)\| \leq \|F(a'_+)\| + \|F(a'_-)\| + \|F(a''_+)\| + \|F(a''_-)\| \leq 4M\|a\|. \tag{2.27}$$

Veamos entonces que si F es positiva entonces es continua en $\mathcal{A}^+$. Supongamos que F no está acotada, luego por lo anterior no estará acotada en $\mathcal{A}^+$. Para cada $n \in \mathbf{N}$ existirá entonces un $a_n \in B_{\mathcal{A}^+}$ tal que $\|F(a_n)\| \geq n^3$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-2} a_n$ convergerá a algún $a \in \mathcal{A}^+$ y, como F es positiva, tendremos $F(a) \geq n^{-2} F(a_n) \geq 0$ para cada n, donde $\leq$ es la relación de orden que establece $\mathcal{B}^+$ en $\mathcal{B}$. Usando que $a \leq b \Rightarrow \|a\| \leq \|b\|$ se tiene entonces:

$$\|F(a)\| \geq n^{-2} \|F(a_n)\| \geq n \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \tag{2.28}$$

lo que no es posible porque $\|F(a)\|$ es finito. Por tanto, F está acotada en $\mathcal{A}^+$ y en consecuencia será continua en $\mathcal{A}$. $\square$

En las condiciones anteriores, tomando $\mathcal{B} = \mathbf{C}$ es claro que un estado en una C^* álgebra unital es un caso particular de aplicación lineal positiva entre dos C^* álgebras. Para extender el concepto a C^* álgebras no unitales habrá que reemplazar la condición de normalización por otra que la generalice.

Definición 2.2.3. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra. Un *estado* en $\mathcal{A}$ es una aplicación lineal $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ positiva y con $\|\omega\| = 1$.

La positividad definida en 2.2.2 generaliza claramente la positividad de la definición 2.2.1, pues los elementos positivos en $\mathbf{C}$ son, de acuerdo al Teorema 2.1.3, los reales positivos. La normalización queda también correctamente extendida pues, por 2.2.2, $\|\omega\| = \omega(1_{\mathcal{A}})$ para el caso unital, cumpliéndose $\omega(1_{\mathcal{A}}) = 1$ si se da la condición de estado.

Proposición 2.2.4. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra no unital. Todo estado $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ admite una extensión a un estado $\omega_{\mathbb{I}} \in \mathcal{S}(\mathcal{A}_{\mathbb{I}})$.

Demostración. El estado $\omega_{\mathbb{I}}$ se define como la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \omega_{\mathbb{I}}: & \mathcal{A}_{\mathbb{I}} = \mathcal{A} \oplus \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & a + \lambda & \longmapsto & \omega(a) + \lambda, \end{array} \tag{2.29}$$

que es lineal por serlo ω y satisface

$$\omega_{\mathbb{I}}(1_{\mathcal{A}_{\mathbb{I}}}) = \omega_{\mathbb{I}}(0 + 1_{\mathbf{C}}) = \omega(0) + 1 = 1, \tag{2.30}$$

luego basta probar la positividad. Para ello, reproduciendo los resultados del caso unital 2.8 y 2.9 se llega a:

$$\omega_{\mathbb{I}}\left((a+\lambda)^*(a+\lambda)\right) \geq \left|\omega(a) + \bar{\lambda}\right|^2 \geq 0, \tag{2.31}$$

lo que, por el Teorema 2.1.3, prueba la positividad de $\omega_{\mathbb{I}}$. □

Proposición 2.2.5. El espacio de estados de una C^* álgebra es un conjunto convexo. Si el álgebra es unital, el espacio de estados es un conjunto convexo y compacto en la topología ω^*.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra unital. Para probar que $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ es convexo hay que ver que los axiomas de la definición 2.2.1 se conservan bajo sumas convexas, es decir, si $\{\omega_i\}_{i=1,\ldots,n} \subset \mathcal{S}(\mathcal{A})$, hay que probar que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \in [0,1] \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$. La comprobación es inmediata, pues la positividad y la normalización se conservan claramente bajo este tipo de sumas. Para el caso no unital, se procede de manera idéntica pasando por la extensión de los estados a la unitización $\mathcal{A}_{\mathbb{I}}$ de 2.2.4.

Veamos ahora que si $\mathcal{A}$ es unital, el espacio de estados es además un conjunto compacto. Como se vio en 2.25, cuando el álgebra es unital el espacio de estados es un subconjunto del dual $\mathcal{A}^*$. Sea $\omega \in \overline{\mathcal{S}(\mathcal{A})}^{\omega^*}$. Existe entonces una sucesión $(\omega_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathcal{A})$ tal que

$$\omega_n \xrightarrow{\omega^*} \omega \Leftrightarrow \omega_n(a) \to \omega(a) \quad \forall\, a \in \mathcal{A}. \tag{2.32}$$

Una sucesión de términos no negativos en $\mathbf{R}$ tiene límite no negativo y, tomando $a = 1_{\mathcal{A}}$, se tiene $\omega(1_{\mathcal{A}}) = 1$, luego $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ y por tanto $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ es un subconjunto ω^*-cerrado del dual $\mathcal{A}^*$. Pero los estados verifican además $\|\omega\| = 1$, de manera que $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \subset B_{\mathcal{A}^*}$. Por el Teorema de Alaoglu (0.2.2) la bola del espacio dual es ω^*-compacta, luego $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ es débilmente compacto en la topología de subespacio $\omega^*|_{B_{\mathcal{A}^*}}$. $\square$

Esta caracterización geométrica del espacio de estados se pone de manifiesto si analizamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.2. El caso más sencillo es el de la C^* álgebra $\mathbf{C}$, cuyo espacio de estados es un punto. Al ser $\mathbf{C}$ un espacio de Hilbert, de acuerdo a la correspondencia antilineal e isométrica con su dual de 0.2.3 los funcionales de $\mathbf{C}^*$ son de la forma $\omega(z) = az$ con $a \in \mathbf{C}$. Imponiendo la normalización es inmediato que $\mathcal{S}(\mathbf{C}) = \{\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}\}$.

Ejemplo 2.2.3. Por el mismo razonamiento anterior, los funcionales de $(\mathbf{C} \oplus \mathbf{C})^*$ serán de la forma $\omega(z_1\,, z_2) = az_1 + bz_2$, con $a, b \in \mathbf{C}$. La positividad requiere que c_1 y c_2 sean elementos positivos de $\mathbf{C}$ y la normalización que $c_1 + c_2 = 1$, de modo que el espacio de estados de $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ queda identificado con el intervalo $[0\,, 1]$.

El siguiente resultado prueba que en toda C^* álgebra hay estados suficientes.

Proposición 2.2.6. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra. Para cada $a \in \mathcal{A}$ y cada $z \in \sigma(a)$ existe al menos un estado $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ tal que $\omega(a) = z$. Si a es hermítico, existe un estado $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ tal que $|\omega(a)| = \|a\|$.

Demostración. Si el álgebra es no unital, tómese su unitización y la extensión de los estados según 2.2.4. Dados $a \in \mathcal{A}$ y $z \in \sigma(a)$, se define la aplicación lineal:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_z : \quad \mathbf{C}a + \mathbf{C}1_{\mathcal{A}} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ \lambda a + \mu 1_{\mathcal{A}} &\longmapsto \lambda z + \mu . \end{aligned} \tag{2.33}$$

Como $z \in \sigma(a)$, se tiene $\lambda z + \mu \in \sigma(\lambda a + \mu 1_{\mathcal{A}})$ por definición del espectro, es decir, $\tilde{\omega}_z(\lambda a + \mu 1_{\mathcal{A}}) \in \sigma(\lambda a + \mu 1_{\mathcal{A}})$ y, por el primer punto de 1.1.3, $|\tilde{\omega}_z(\lambda a + \mu 1_{\mathcal{A}})| \leq \|\lambda a + \mu 1_{\mathcal{A}}\|$. Pero $\tilde{\omega}_z(1_{\mathcal{A}}) = 1$, luego $\|\tilde{\omega}_z\| = 1$ y, por el Teorema de Hann-Banach (0.1.5), existe una extensión $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ de $\tilde{\omega}_z$ con norma 1. Por la proposición 2.2.2, ω es un estado, que satisface por construcción $\omega(a) = z$. Finalmente, como el espectro de a es cerrado (1.1.3), existe un $z \in \sigma(a)$ tal que $r(a) = |z|$. Si a es hermítico, por 1.2.7 y para el estado ω que el razonamiento anterior proporciona para z y a, se tiene $|\omega(a)| = r(a) = \|a\|$. □

2.3. Representaciones de una C^* álgebra

Definición 2.3.1. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra. Una *representación* de $\mathcal{A}$ en un espacio de Hilbert H es un $*$-homomorfismo lineal $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H)$. Puede denotarse igualmente como el par $(\pi\,, H)$.

Observación 2.3.1. De acuerdo al corolario 1.2.8, toda representación en las condiciones anteriores es continua y está acotada como

$$\|\pi(a)\| \leq \|a\| \quad \forall\, a \in \mathcal{A}. \tag{2.34}$$

Si además π es inyectiva, por 1.2.11 π es también una isometría.

Definición 2.3.2. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra y π_1, π_2 dos representaciones de $\mathcal{A}$ en los espacios de Hilbert H_1 y H_2 respectivamente. Se dice que las representaciones π_1 y π_2 son *unitariamente equivalentes* si existe un isomorfismo unitario[1] $U : H_1 \longrightarrow H_2$ tal que

$$U\pi_1(a)U^* = \pi_2(a) \quad \forall\, a \in \mathcal{A}, \tag{2.35}$$

donde U^* denota el operador adjunto de U definido según 0.2.2.

Definición 2.3.3. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra y π una representación de $\mathcal{A}$ en un espacio de Hilbert H. Se dice que π es *no degenerada* si se verifica:

$$\{\psi \in H : \pi(a)(\psi) = 0 \quad \forall\, a \in \mathcal{A}\} = \{0\}. \tag{2.36}$$

Definición 2.3.4. En las condiciones de la definición anterior, se dice que un vector $\Omega \in H$ es *cíclico para* π si el subconjunto

$$\pi(\mathcal{A})(\Omega) = \{\pi(a)(\Omega) : a \in \mathcal{A}\} \subset H \tag{2.37}$$

es denso en H, es decir, si $\overline{\pi(\mathcal{A})(\Omega)} = H$, donde la topología es la heredada de la norma de H. Si existe algún vector cíclico para la representación π, se dice que π es *cíclica.*

Proposición 2.3.1. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra unital y π una representación no degenerada de $\mathcal{A}$ en un espacio de Hilbert H. Cada elemento $\psi \in H$ con norma 1 define un estado en $\mathcal{A}$.

Demostración. Sea $\psi \in H$ tal que $\|\psi\| = 1$ y defínase:

$$\begin{array}{rccl} \omega_\psi : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & a & \longmapsto & \omega_\psi(a) = \langle \psi \,, \pi(a)(\psi)\rangle. \end{array} \tag{2.38}$$

Comprobemos que ω_ψ es efectivamente un estado en $\mathcal{A}$. La linealidad se tiene por ser lineales π y el producto escalar. Para ver que es positiva, sea $a \in \mathcal{A}$ y, usando las propiedades de los

[1]Un operador entre dos espacios de Hilbert es *unitario* si su operador adjunto coincide con su inverso. Esta identificación es coherente con la definición de operador adjunto según 0.2.2, pues un espacio de Hilbert y su dual son antilinealmente isométricos (0.2.3).

$*$-homomorfismos:

$$\omega_\psi(a^*a) = \langle \psi\,, \pi(a^*a)(\psi)\rangle = \langle \psi\,, \pi(a^*)\pi(a)(\psi)\rangle = \langle \psi\,, \pi(a)^*\pi(a)(\psi)\rangle =$$
$$= \langle \pi(a)(\psi)\,, \pi(a)(\psi)\rangle = \|\pi(a)(\psi)\|^2 \geq 0,$$

luego falta ver que $\omega_\psi(1_\mathcal{A}) = 1$. En primer lugar, tenemos:

$$\omega_\psi(1_\mathcal{A}) = \langle \psi\,, \pi(1_\mathcal{A})(\psi)\rangle. \tag{2.39}$$

Si probamos $\pi(1_\mathcal{A}) = \mathrm{Id}_H$ ya está, pues por hipótesis $\|\psi\| = 1$. Como π es un $*$-homomorfismo:

$$\pi(a) = \pi(a1_\mathcal{A}) = \pi(a)\pi(1_\mathcal{A}) \quad \forall\, a \in \mathcal{A}. \tag{2.40}$$

Ahora bien, si $\pi(1_\mathcal{A}) \neq \mathrm{Id}_\mathcal{A}$, entonces existiría un $\psi \in H$ tal que $\pi(1_\mathcal{A})(\psi) \neq \psi$, luego podríamos definir $\phi = \psi - \pi(1_\mathcal{A})(\psi)$ no nulo. De 2.40 obtendríamos que $\pi(a)(\phi) = 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$, lo que contradice la hipótesis de no degeneración. $\square$

Observación 2.3.2. El resultado anterior se extiende al caso de álgebras no unitales tomando su unitización y las extensiones de los estados dadas por 2.2.4. Esta maniobra puede realizarse siempre, de manera que de aquí en adelante nos restringiremos al caso unital.

Una construcción recíproca también es posible. Dada una C^* álgebra $\mathcal{A}$, todo estado $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ define una representación cíclica π_ω en un espacio de Hilbert H_ω con vector cíclico Ω_ω. El método que lleva a su obtención recibe el nombre de *construcción GNS* (Gelfand-Naimark-Segal).

2.3.1. Construcción GNS

Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra unital y $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. A partir de este estado definimos sobre $\mathcal{A}$ la aplicación:

$$\begin{array}{rccl} \langle\ ,\ \rangle_0 : & \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & (a,b) & \longmapsto & \langle a\,, b\rangle_0 = \omega(a^*b), \end{array} \tag{2.41}$$

que, por construcción y por las propiedades de ω, es una forma sesquilineal. En particular, 2.41 es un funcional semi-definido positivo por ser ω un estado, es decir, satisface $\langle a\,, a\rangle_0 \geq 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Además, su núcleo puede reescribirse como:

$$\mathcal{N}_\omega = \mathrm{Ker}(\langle\ ,\ \rangle_0) = \{a \in \mathcal{A} : \langle a\,, a\rangle_0 = 0\} = \{a \in \mathcal{A} : \langle a\,, b\rangle_0 = 0 \quad \forall b \in \mathcal{A}\}, \tag{2.42}$$

teniendo en cuenta 2.8. Esto último permite comprobar rápidamente que $\mathcal{N}_\omega$ es un ideal a izquierdas: si $y \in \mathcal{N}_\omega$ y $a \in \mathcal{A}$, para todo $b \in \mathcal{A}$:

$$\langle ay, b\rangle_0 = \omega(y^* a^* b) = \langle y\,, a^* b\rangle_0 = 0. \tag{2.43}$$

Además, como ω es continuo por ser un estado, $\mathcal{N}_\omega$ es cerrado en $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ por ser la antiimagen del cerrado $\{0\}$. Estamos por tanto en condiciones de construir el cociente $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$ y la proyección canónica:

$$\begin{array}{rccl} V\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega \\ & a & \longmapsto & [a] = a + \mathcal{N}_\omega, \end{array} \tag{2.44}$$

a partir de la cual definimos el siguiente producto escalar en $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$:

$$\langle [a]\,, [b]\rangle_\omega = \langle a\,, b\rangle_0, \tag{2.45}$$

que está bien definido, pues si $[a'] = [a]$ y $[b] = [b']$ para $a, a', b, b' \in \mathcal{A}$, existen $y_a\,, y_b \in \mathcal{N}_\omega$ tales que $a' = a + y_a$, $b' = b + y_b$ y:

$$\begin{aligned} \langle [a']\,, [b']\rangle_\omega = \langle a'\,, b'\rangle_0 = \langle a + y_a\,, b + y_b\rangle_0 = \omega((a^* + y_a^*)(b + y_b)) = \\ = \omega(a^* b) + \omega(a^* y_b) + \omega(y_a^* b) + \omega(y_a^* y_b) = \omega(a^* b) = \langle [a]\,, [b]\rangle_\omega, \end{aligned}$$

donde los términos $\omega(a^* y_b)$ y $\omega(y_a^* y_b)$ son nulos por ser $\mathcal{N}_\omega$ un ideal a izquierdas y, por el mismo motivo, $\omega(y_a^* b) = \omega((b^* y_a)^*) = \overline{\omega(b^* y_a)} = 0$, usando además 2.9. Por las propiedades de 2.41, la aplicación 2.45 es efectivamente un producto escalar que dota a la complección $H_\omega = \overline{\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega}$ de estructura de espacio de Hilbert.

Consideramos ahora la aplicación:

$$\begin{array}{rcccccl} \pi_\omega\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega) & & & \\ & a & \longmapsto & \pi_\omega(a)\colon & \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega & \longrightarrow & \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega \\ & & & & [b] & \longmapsto & [ab], \end{array} \tag{2.46}$$

que estará bien definida si $\pi_\omega(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega)$ para todo $a \in \mathcal{A}$. La linealidad es inmediata definiendo las operaciones usuales en el espacio cociente y, para probar la continuidad, sea $a \in \mathcal{A}$ y $[b] \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$:

$$\|\pi_\omega(a)([b])\|^2 = \|[ab]\|^2 = \omega((ab)^*(ab)) = \omega(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2\omega(b^*b) = \|a\|^2\|[b]\|^2, \tag{2.47}$$

usando 2.24 y la linealidad del estado. Además, π_ω es claramente lineal y un $*$-homomorfismo:

i) $\pi_\omega(ab)([c]) = [abc] = \pi_\omega(a)([bc]) = \pi_\omega(a)(\pi_\omega(b)([c])) = \pi_\omega(a)\pi_\omega(b)([c]) \quad \forall\, a, b, c \in \mathcal{A}$,

ii) $\langle [b]\,, \pi_\omega(a)^*([c])\rangle_\omega = \langle \pi_\omega(a)([b])\,, [c]\rangle_\omega = \langle [ab]\,, [c]\rangle_\omega = \omega(b^*a^*c) = \langle [b]\,, [a^*c]\rangle_\omega =$
$= \langle [b]\,, \pi_\omega(a^*)([c])\rangle_\omega \quad \forall\, a, b, c \in \mathcal{A}$.

Redefiniendo π_ω como la extensión continua de 2.46 a la complección $H_\omega = \overline{\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega}$, hemos construido una representación de $\mathcal{A}$ en el espacio de Hilbert H_ω. Esta representación es cíclica, pues el vector $\Omega_\omega = 1_\mathcal{A} + \mathcal{N}_\omega$ es tal que el conjunto:

$$\pi_\omega(\mathcal{A})(\Omega_\omega) = \{a + \mathcal{N}_\omega \quad \forall\, a \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega \tag{2.48}$$

es trivialmente denso en H_ω. El vector cíclico verifica igualmente:

$$\langle \Omega_\omega\,, \pi_\omega(a)(\Omega_\omega)\rangle_\omega = \omega(a) \quad \forall\, a \in \mathcal{A}, \tag{2.49}$$

de manera que:

$$\omega(a^*a) = \langle \Omega_\omega\,, \pi_\omega(a)^*\pi_\omega(a)\Omega_\omega\rangle_\omega = \langle \pi_\omega(a)\Omega_\omega\,, \pi_\omega(a)\Omega_\omega\rangle = \|\pi_\omega(a)\Omega_\omega\|^2 \quad \forall\, a \in \mathcal{A}. \tag{2.50}$$

Por tanto, todo estado en una C^* álgebra define una representación cíclica del álgebra en un espacio de Hilbert. Además, toda representación cíclica es equivalente a una representación GNS.

Proposición 2.3.2. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra unital y $(\pi\,, H)$ una representación cíclica de $\mathcal{A}$. Dado cualquier vector cíclico $\Omega \in H$ de norma 1, la representación GNS construida a partir del estado ω que define Ω de acuerdo a la proposición 2.3.1, $(\pi_\omega\,, H_\omega)$, es equivalente a $(\pi\,, H)$.

Demostración. Definamos el operador:

$$\begin{aligned} U: \quad H_\omega \quad &\longrightarrow \quad H \\ a + \mathcal{N}_\omega \quad &\longmapsto \quad \pi(a)(\Omega). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Teniendo en cuenta cómo se define el estado ω según 2.38, se prueba que U está bien definido y que es unitario en su restricción a la imagen $U(H_\omega)$. Pero Ω es cíclico, luego $\overline{\pi(\mathcal{A})(\Omega)} = H = \mathrm{Im}(U)$, de modo que U es unitario e inmediatamente se tiene $U\pi_\omega(a)U^* = \pi(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$. □

Corolario 2.3.3. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra y $(\pi_1\,, H_1)$, $(\pi_2\,, H_2)$ dos representaciones cíclicas de $\mathcal{A}$ con vectores cíclicos Ω_1 y Ω_2 respectivamente. Si los estados que definen en $\mathcal{A}$ los vectores Ω_1 y Ω_2 coinciden, entonces ambas representaciones son equivalentes.

Demostración. Por la proposición anterior, $(\pi_1\,, H_1)$ es equivalente a la representación GNS dada por el estado $\omega_1(a) = \langle \Omega_1\,, \pi_1(a)(\Omega_1)\rangle$ y $(\pi_2\,, H_2)$ es equivalente a la representación GNS dada por el estado $\omega_2(a) = \langle \Omega_2\,, \pi_2(a)(\Omega_2)\rangle$, para todo $a \in \mathcal{A}$. Pero por hipótesis ω_1 y ω_2 coinciden, luego determinarán la misma representación GNS y así $(\pi_1\,, H_1)$ y $(\pi_2\,, H_2)$ son equivalentes por la transitividad de la relación de equivalencia. □

2.3.2. Teorema de Gelfand-Naimark

Del desarrollo anterior podemos concluir que el estudio de las representaciones cíclicas de C^* álgebras se reduce al estudio de las representaciones GNS y, por tanto, al estudio de sus espacios de estados, que tienen estructura geométrica.

La introducción de las representaciones GNS permite probar uno de los resultados principales de la Teoría de C^* álgebras y que es fundamental para construir el marco de la Mecánica Cuántica. Para demostrar de una manera más sencilla dicho teorema conviene introducir primeramente el concepto de representación universal.

Definición 2.3.5. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra. Se define la *representación universal* de $\mathcal{A}$ como la suma directa de todas las representaciones GNS de $\mathcal{A}$ para cada estado $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, es decir, como el par $(\pi_u\,, H_u)$, donde $H_u = \bigoplus_{\omega\in\mathcal{S}(\mathcal{A})} H_\omega$ y:

$$\begin{array}{rccl} \pi_u\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B}(H_u) \\ & a & \longmapsto & \pi_u(a) = \left(\pi_\omega(a)\right)_{\omega\in\mathcal{S}(\mathcal{A})} . \end{array} \tag{2.52}$$

Teorema 2.3.4 (Gelfand-Naimark)**.** *Toda C^* álgebra es isométricamente isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{B}(H)$, para algún espacio de Hilbert H.*

Demostración. Tomando $H = H_u$, el isomorfismo está dado por la representación π_u, que es por definición un $*$-homomorfismo. Como se vio en 1.2.12, su imagen será un subálgebra de $\mathcal{B}(H)$, luego hay que probar que π_u es una isometría. Para ello, por 1.2.11, basta ver que es inyectiva. Supongamos que existe un $a \in \mathcal{A}$ tal que $\pi_u(a) = 0$. Por definición de suma directa, esto implica que $\pi_\omega(a) = 0$ para todo $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Todas las representaciones son entonces aplicaciones nulas y, en particular, $\pi_\omega(a)(\Omega_\omega) = 0$, luego $\|\pi_\omega(a)(\Omega_\omega)\|^2 = 0$ y, por 2.50, $\omega(a^*a) = 0$ para todos los estados $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Pero por 2.2.6 siempre existe un estado tal que $|\omega(a^*a)| = \|a^*a\|$, luego necesariamente $\|a^*a\| = \|a\|^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$, lo que prueba el resultado. □

El Teorema anterior tiene una relevancia especial desde el punto de vista histórico pues, como ya hemos adelantado, recoge la primera definición de una C^* álgebra. Este concepto surge del estudio del álgebra de los operadores lineales y acotados de un espacio de Hilbert y sus subálgebras autoadjuntas. Si H es un espacio de Hilbert, podemos dotar a $\mathcal{B}(H)$ de varias topologías, entre las cuales se encuentran, definidas según su criterio de convergencia, las tres siguientes:

i) La topología de la norma de H, definida por la convergencia $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T_0 \Leftrightarrow \|T_n - T_0\| \longrightarrow 0$.

ii) La topología fuerte, definida por la convergencia $T_n \xrightarrow{s} T_0 \Leftrightarrow \|(T_n - T_0)(\psi)\| \to 0 \; \forall \, \psi \in H$.

iii) La topología débil, ya introducida para cualquier espacio normado en 0.2 y con el criterio de convergencia $T_n \xrightarrow{\omega} T_0 \Leftrightarrow |\langle \psi \, , (T_n - T_0)(\psi) \rangle| \longrightarrow 0$ en $\mathcal{B}(H)$.

La convergencia en norma implica convergencia fuerte y, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, esta última implica convergencia débil. En otras palabras, la convergencia en norma es más fuerte que la convergencia fuerte, que a su vez es más fuerte que la convergencia débil. En 1943, Segal introdujo el término C^* álgebra para referirse a las subálgebras autoadjuntas de $\mathcal{B}(H)$ cerradas en la topología de la norma[2]: la C viene del inglés *closed*. En este contexto, es de gran importancia la existencia de una definición axiomática que no menciona en ningún punto los operadores de $\mathcal{B}(H)$, pero que conduce al Teorema 2.3.4.

Por otra parte, desde esta misma perspectiva se buscó caracterizar aquellas subálgebras que fueran cerradas en la topología más débil de las tres anteriores, que recibieron el nombre de *W^* álgebras* o *álgebras de von Neumann* y son, por lo anterior, un caso particular de C^* álgebras.

Una definición equivalente se deduce del Teorema del doble conmutador, probado por Neumann[3] en 1930 y que establece un resultado central en la Teoría del álgebra de operadores. Recuérdese que el conmutador $\mathcal{A}'$ de una colección de operadores acotados es el conjunto de todos los operadores acotados que conmutan con todos los elementos de $\mathcal{A}$, siendo $\mathcal{A}'' = (\mathcal{A}')'$.

Teorema 2.3.5 (Doble conmutador)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y $\mathcal{A}$ una $*$-subálgebra unital de $\mathcal{B}(H)$. Son equivalentes:*

i) $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$,

ii) $\mathcal{A}$ *es ω-cerrada,*

iii) $\mathcal{A}$ *es s-cerrada.*

[2]Segal, Irving (1947), 'Irreducible representations of operator algebras", Bulletin of the American Mathematical Society, 53 (2): 73−88.

[3]von Neumann, J. (1930), 'Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren", Math. Ann., 102 (1): 370−427.

Por tanto, las subálgebras de $\mathcal{B}(H)$ débilmente cerradas coinciden con las subálgebras de $\mathcal{B}(H)$ fuertemente cerradas. Así, podemos definir de manera equivalente un álgebra de von Neumann como una subálgebra autoadjunta de $\mathcal{B}(H)$ s-cerrada o tal que coincida con su doble conmutador. Del mismo modo, Sakai[4] probó en 1971 que es posible definir un álgebra de von Neumann de manera abstracta sin mencionar los operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert: una W^* álgebra es una C^* álgebra que tiene un predual, es decir, tal que es el dual de algún espacio de Banach.

Además, la equivalencia entre las C^* álgebras conmutativas y los espacios topológicos localmente compactos y T_2 que establece el Teorema de Gelfand-Naimark tiene su análogo en el conjunto de las álgebras de von Neumann. Para cada W^* álgebra conmutativa $\mathcal{N}$, existe un espacio de medida (X, Σ, μ) tal que $\mathcal{N}$ es isomorfa al espacio $L^\infty_\mu(X)$, que es un álgebra de von Neumann. Del mismo modo que la eliminación de la conmutatividad en la equivalencia de C^* álgebras es el punto de partida de la Topología no conmutativa, un planteamiento análogo en las álgebras de von Neumann da lugar a la conocida como *Teoría de la medida no conmutativa.*

2.4. Estados puros y representaciones irreducibles

Como se ha visto, el espacio de estados de una C^* álgebra es un conjunto convexo. Además, en los ejemplos mencionados los conjuntos correspondientes tienen una frontera natural, lo que lleva a introducir una definición intrínseca del concepto.

Definición 2.4.1. Sea K un subconjunto convexo de un espacio vectorial. Un *punto extremal* de K es un elemento $\omega \in K$ tal que, si $\omega = \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2$ para algún $\lambda \in (0,1)$ y $\omega_1, \omega_2 \in K$, entonces $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. El conjunto de puntos extremales de K recibe el nombre de *frontera extremal.*

Un poliedro macizo es un conjunto convexo, cuyos vértices son los puntos extremales. Otro ejemplo sería la bola cerrada, cuya frontera extremal coincide con su corteza esférica.

[4] Sakai, S. (1971), C*-algebras and W*-algebras, Springer.

Definición 2.4.2. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra. Se dice que un estado $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ es *puro* si ω es un punto extremal de $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. En otro caso se dice que ω es un *estado mezcla*.

De acuerdo al ejemplo 2.2.3, los estados puros en $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ son los puntos 0 y 1 del intervalo $[0, 1]$, donde 0 se identifica con el estado $\omega(z_1, z_2) = z_1$ y 1 con el estado $\omega(z_1, z_2) = z_2$.

Veamos ahora qué ocurre cuando una representación GNS se construye a partir de un estado puro. Para ello introducimos el concepto de representación irreducible.

Definición 2.4.3. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra y π una representación de $\mathcal{A}$ en un espacio de Hilbert H. Se dice que π es *irreducible* si no existen subespacios cerrados propios de H invariantes bajo $\pi(\mathcal{A})$, es decir, si existe un subespacio cerrado C de H tal que $T(C) = C$ para todo $T \in \pi(\mathcal{A})$, entonces o bien $C = H$ o bien $C = 0$.

El resultado siguiente proporciona una caracterización muy útil de la irreduciblidad de una representación.

Proposición 2.4.1. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra y π una representación de $\mathcal{A}$ en un espacio de Hilbert H. Son equivalentes:

i) π es irreducible,

ii) $\pi(\mathcal{A})' = \{\lambda \mathrm{Id}_H : \lambda \in \mathbf{C}\}$ o, equivalentemente, $\pi(\mathcal{A})'' = \mathcal{B}(H)$, *(Lema de Schur)*

iii) Todo vector de H es cíclico para π.

Como sabemos que el álgebra de operadores lineales y acotados $\mathcal{B}(H)$ es un álgebra de von Neumann (el espacio total es trivialmente cerrado en todas las topologías), del resultado anterior deducimos que toda representación suprayectiva de un álgebra $\mathcal{A}$ en un espacio de Hilbert H ha de ser irreducible. Además, esta proposición permite probar el siguiente teorema, que responde a la pregunta que nos hemos planteado.

Teorema 2.4.2. *Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra y $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. La representación GNS que define ω es irreducible si y solo si ω es un estado puro.*

Recordando 2.3.2, como toda representación irreducible es cíclica por 2.4.1, tenemos:

Proposición 2.4.3. Toda representación irreducible de una C^* álgebra es equivalente a una representación GNS.

Finalmente, la proposición anterior y el teorema 2.4.2 dan lugar al siguiente corolario:

Corolario 2.4.4. Toda representación irreducible de una C^* álgebra proviene de un estado puro a través de una representación GNS.

Del mismo modo que habíamos establecido una correspondencia entre las representaciones cíclicas y los estados de una C^* álgebra, este último resultado identifica los estados puros con las representaciones irreducibles, siendo coherente con la correspondencia anterior ya que toda representación irreducible es cíclica.

Igualmente a cómo se hizo en el caso de los estados, nuestro planteamiento ahora es buscar a qué corresponden los estados puros en el caso conmutativo, que ya sabemos que tendrán que formar un subconjunto de las medidas de probabilidad sobre el espacio clásico X asociado al álgebra. Para ello usaremos el lema siguiente, que sirve como caracterización alternativa de los estados puros sin recurrir a las representaciones GNS asociadas.

Lema 2.4.5. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra y $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. El estado ω es puro si y solo si, para todo $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ positivo tal que $0 \leq \rho \leq \omega$, entonces $\rho = t\omega$ para algún $t \in \mathbf{R}^+$.

Proposición 2.4.6. Si $\mathcal{A}$ es una C^* álgebra conmutativa, los estados puros de $\mathcal{A}$ coinciden con sus caracteres.

Demostración. Si $\mathcal{A}$ no es unital podemos tomar su unitización $\mathcal{A}_{\mathbb{I}}$. Esto es posible porque la extensión única de un estado puro en $\mathcal{A}$ a un estado en $\mathcal{A}_{\mathbb{I}}$ dada por 2.2.4 es un estado puro. Tomamos entonces $\mathcal{A}$ unital y sea $\omega \in \Delta(\mathcal{A})$, luego será en particular un estado en $\mathcal{A}$. Sea $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ positivo tal que $0 \leq \rho \leq \omega$. Entonces $\ker(\omega) \subset \ker(\rho)$, pero por 1.1.8 $\ker(\omega)$ es un ideal maximal de $\mathcal{A}$, luego si $\rho \neq 0$ necesariamente $\ker(\rho) = \ker(\omega)$. Pero dos funcionales sobre un espacio vectorial son proporcionales si tienen el mismo núcleo, luego por 2.4.5 el estado ω es puro.

Tenemos que todo caracter en $\mathcal{A}$ es un estado puro. Para probar el recíproco sea ω un estado puro en $\mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{A}$ tal que $0 \leq b \leq 1_{\mathcal{A}}$, donde $\leq$ es la relación de orden que establecen los elementos positivos. Definimos un funcional ω_b en $\mathcal{A}$ como $\omega_b(a) = \omega(ba)$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Como $\omega(a) - \omega_b(a) = \omega(a(1_{\mathcal{A}} - b))$ y $0 \leq b \leq 1_{\mathcal{A}}$, se tiene que $0 \leq \omega_b \leq \omega$ y, como ω es puro, que $\omega_b = t\omega$ para algún $t \in \mathbf{R}^+$. Por ser proporcionales, ambos funcionales tendrán el mismo núcleo y por tanto si $a \in \ker(\omega)$, entonces $ba \in \ker(\omega)$ para todo $a \in \mathcal{A}$, es decir, $\ker(\omega)$ es un ideal de $\mathcal{A}$. Como el núcleo de todo funcional sobre un espacio vectorial tiene codimensión 1, $\ker(\omega)$ es un ideal maximal y, por la correspondencia construida en 1.1.8, ω es entonces un estado puro. □

Por tanto, si la C^* álgebra es conmutativa, el espacio estructural coincide con el espacio de estados puros y, recordando que los caracteres del álgebra están en correspondencia biunívoca con los puntos del espacio clásico asociado, tenemos entonces el resultado siguiente.

Proposición 2.4.7. Si $\mathcal{A}$ es una C^* álgebra conmutativa, existe una correspondencia biyectiva entre los estados puros de $\mathcal{A}$ y los puntos del espacio clásico asociado X.

Esta identificación es coherente con 2.2.1, pues los puntos del espacio X se corresponden con las medidas de Dirac en cada punto. En principio, podría ocurrir que para una C^* álgebra $\mathcal{A}$ no existieran estados puros en $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, de manera que el álgebra no tendría representaciones irreducibles. Esta posibilidad queda excluida por el Teorema de Krein-Milman, que tiene gran relevancia en el Análisis Funcional.

Definición 2.4.4. Sea V un subconjunto de un espacio vectorial. Se define su *envolvente convexa* como el conjunto de las combinaciones convexas de elementos de V:

$$\mathrm{co}(V) = \{\lambda v + (1-\lambda)w : v, w \in V,\ \lambda \in [0,1]\}. \tag{2.53}$$

Teorema 2.4.8 (Krein-Milman)**.** *Todo subconjunto convexo y compacto de un espacio vectorial localmente convexo es la clausura de la envolvente convexa de sus puntos extremales.*

Como hemos visto, el espacio de estados de una C^* álgebra unital es un subconjunto convexo y compacto del dual $\mathcal{A}^*$, que es un espacio vectorial localmente convexo. Así, el espacio de estados $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ es la clausura de la envolvente convexa del espacio de estados puros $\mathcal{P}(\mathcal{A})$:

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \overline{\mathrm{co}(\mathcal{P}(\mathcal{A}))}, \tag{2.54}$$

luego los estados de una C^* álgebra pueden aproximarse por sumas finitas convexas de estados puros, es decir, todo estado es el ω^*-límite de sumas convexas de estados puros. Aplicando esto al caso conmutativo tenemos que las medidas de probabilidad sobre el espacio clásico X pueden aproximarse por sumas finitas convexas de medidas puntuales de Dirac. Interpretándolo físicamente, tener un estado puro en el caso clásico es tener un punto en el espacio de fases asociado X, es decir, tener total certeza del comportamiento del sistema en ese punto. Dados dos estados puros, puede obtenerse un nuevo estado como su combinación convexa, dando cierta probabilidad a cada uno mediante los coeficientes de la combinación. El estado resultante no podrá ser puro y por tanto no estará identificado con un punto del espacio de fases; será lo que se conoce como un estado *estadístico* del sistema, es decir, una combinación convexa de elementos del espacio de estados puros o un límite de cualquiera de sus sucesiones. Esto garantiza en general que una C^* álgebra tiene estados puros suficientes, lo que se pone más claramente de manifiesto si probamos el resultado siguiente.

Proposición 2.4.9. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra. Para cada $a \in \mathcal{A}$ hermítico y cada $z \in \sigma(a)$ existe un estado puro ω_z en $\mathcal{A}$ tal que $\omega_z(a) = z$. Igualmente, existe un estado puro ω tal que $|\omega(a)| = \|a\|$.

Demostración. Fijados $a \in \mathcal{A}$ y $z \in \sigma(a)$, el estado ω_z se construye a partir de la extensión de la aplicación $\tilde{\omega}_z$ de 2.33 en 2.2.6 a la subálgebra $C^*(a, 1_{\mathcal{A}})$. A continuación se extiende a un funcional en $\mathcal{A}$ por el Teorema de Hann-Banach y se prueba que el conjunto de todas estas extensiones K_z es un subconjunto cerrado y convexo de $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Por tanto, K_z es un subconjunto convexo y compacto de $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ que tendrá, por el Teorema de Krein-Milman, al menos un punto extremal ω_z. Si ω_z no fuera un elemento extremal de $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, entonces podría escribirse en la forma $\omega_z = \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2$ para algún $\lambda \in (0,1)$ y $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Pero la extensión que devuelve el

Teorema de Hann-Banach es tal que ω_z coincide con $\tilde{\omega}_z$ en $C^*(a, 1_{\mathcal{A}})$, luego ω_1 y ω_2 tomarían los mismos valores en $C^*(a, 1_{\mathcal{A}})$ contradiciendo que ω_z sea un punto extremal de K_z. La segunda parte de la prueba es análoga al razonamiento de 2.2.6. □

2.5. El álgebra de los operadores compactos

La formulación usual de la Mecánica Cuántica se construye a partir de los axiomas de Dirac-von Neumann, que postulan un marco matemático que tiene al espacio de Hilbert o, más concretamente, al álgebra de los operadores lineales y acotados en un tal espacio por objeto fundamental. El formalismo algebraico pretende extender esta construcción a una axiomática global, que formule simultáneamente las Mecánicas Clásica y Cuántica y que deberá, para ser consistente, derivar de manera natural el contexto de los espacios de Hilbert. Es por ello que la C^*-álgebra de los operadores lineales y acotados juega un papel esencial en Mecánica Cuántica, que quedará de manifiesto en el capítulo final con el análisis de ambas formulaciones. Esta sección servirá como estudio de los aspectos más relevantes del álgebra de operadores que, en el caso finito-dimensional, puede identificarse con la C^*-álgebra de las matrices complejas fijada una base del espacio. El objetivo principal ahora es obtener el espacio de estados (puros) de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ y encontrar el modo apropiado de generalizar las propiedades de este álgebra a un álgebra infinito-dimensional, de manera que tanto su espacio de estados como sus principales propiedades se obtengan como una extensión natural.

Consideremos entonces la C^* álgebra de las matrices complejas, $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, a la que dotamos del siguiente producto escalar:

$$\langle A\,, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^* B), \tag{2.55}$$

para todo $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Veamos cuál es su espacio de estados. De acuerdo con 0.2.3, los funcionales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ pueden escribirse como $\omega(A) = \mathrm{Tr}(B_\omega A)$ para cierta matriz B_ω. Si ω es positivo y satisface $\omega(\mathrm{Id}_n) = 1$, necesariamente B_ω es una matriz compleja $n \times n$ con $\mathrm{Tr}(B_\omega) = 1$ y positiva, esto es, con valores propios mayores o iguales que cero. Este tipo de matrices se denominan *matrices de densidad* o *matrices estadísticas* y constituyen por tanto el espacio de estados de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$:

$$\mathcal{S}(\mathcal{M}_n(\mathbf{C})) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^+ : \mathrm{Tr}(A) = 1\}. \tag{2.56}$$

Esta correspondencia preserva la estructura convexa debido a la linealidad de la traza. Para encontrar los elementos extremales, notemos que toda matriz estadística puede diagonalizarse a través de una base de vectores propios, de manera que cada estado puede identificarse con una tupla de n valores propios $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ positivos y tales que:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(A) = 1, \tag{2.57}$$

para todo estado A, que puede entonces reescribirse como

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i I_i, \tag{2.58}$$

donde I_i es una matriz $n \times n$ de ceros con un 1 en la posición ii. Si A es un estado puro, la combinación lineal convexa 2.58 no puede ser no trivial, de manera que todos los coeficientes λ_i han de ser nulos excepto uno, quedando la matriz estadística bajo la forma:

$$A = I_i, \tag{2.59}$$

para un $i = 1, \ldots, n$, es decir, A es un proyector a un subespacio unidimensional y, por tanto, puede identificarse con un elemento de $\mathbf{C}^n$ de norma 1. Esto último reproduce precisamente la noción usual de un estado puro en Mecánica Cuántica.

Ejemplo 2.5.1. Estudiemos el espacio de estados de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ para $n = 2$, es decir, busquemos las matrices complejas 2×2 positivas y de traza 1. El espacio $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ tiene ahora dimensión 4 y admite una base dada por la matriz identidad y las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.60}$$

que tienen todas traza nula. Toda matriz estadística A puede entonces escribirse bajo la forma

$$A = \frac{1}{2}[\mathbb{I}_2 + x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3] \quad x, y, z \in \mathbf{R}, \tag{2.61}$$

por ser una matriz hermítica y de traza 1. Para que A sea positiva deberá cumplir además que sus valores propios sean reales positivos, lo que en este caso viene garantizado por la condición $\mathrm{Det}(A) \geq 0$. Si expresamos (2.61) como una sola matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}, \tag{2.62}$$

la condición

$$\mathrm{Det}(A) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0, \tag{2.63}$$

se traduce en que la terna (x, y, z) es siempre un elemento de la bola unidad en $\mathbf{R}^3$, que es un conjunto convexo y compacto que podemos identificar con el espacio de estados de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$. Los estados puros serán los elementos extremales de dicho conjunto, es decir, los puntos de la esfera unidad S^2, que es homeomorfa al espacio proyectivo complejo $P^1(\mathbf{C})$. Este álgebra es un ejemplo con interés físico, pues modela un sistema cuántico formado por un electrón en el que sólo consideramos su spin.

Como hemos apuntado, los operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert de dimensión finita pueden identificarse con el álgebra de las matrices complejas $n \times n$ fijada una base del espacio. Es por ello que, cuando uno busca generalizar el álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ para el caso infinito-dimensional, suele pensar que la extensión apropiada es la C^* álgebra $\mathcal{B}(H)$, donde H es un espacio de Hilbert arbitrario. Sin embargo, este álgebra no es una buena generalización. Esto puede justificarse por varios motivos. Por ejemplo, como se probará en esta sección, el álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tiene una única representación irreducible salvo equivalencia, mientras que $\mathcal{B}(H)$ tiene una gran cantidad de representaciones irreducibles inequivalentes. Otro argumento en contra es la no separabilidad de $\mathcal{B}(H)$ en la topología de la norma, incluso cuando el espacio H es separable. La extensión apropiada de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ a un espacio de Hilbert infinito-dimensional resulta ser la C^* álgebra de los operadores compactos $\mathcal{B}_0(H)$ que, además de ser una construcción básica en la Teoría de C^* álgebras, juega un papel esencial en la Geometría no conmutativa.

Definición 2.5.1. Sea H un espacio de Hilbert. Se dice que un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ es *de rango finito* si su imagen $T(H)$ es un subespacio de dimensión finita. El conjunto de los operadores de rango finito en H forma una $*$-álgebra que se denota por $\mathcal{B}_f(H)$.

Definición 2.5.2. Se define la C^* álgebra de los *operadores compactos* $\mathcal{B}_0(H)$ en H como la clausura en la topología de la norma de la $*$-álgebra de los operadores de rango finito $\mathcal{B}_f(H)$ en $\mathcal{B}(H)$. En otras palabras, $\mathcal{B}_0(H)$ es la C^* álgebra más pequeña en $\mathcal{B}(H)$ que contiene a $\mathcal{B}_f(H)$.

Proposición 2.5.1. Sea H un espacio de Hilbert. Entonces:

i) El operador identidad Id_H pertenece a $\mathcal{B}_0(H)$ si y solo si H es de dimensión finita,

ii) $\mathcal{B}_0(H)$ es un ideal en $\mathcal{B}(H)$,

iii) La imagen de la bola unidad B_H por cualquier operador compacto es un compacto en H con la topología de la norma.

Corolario 2.5.2. Todo operador autoadjunto $T \in \mathcal{B}_0(H)$ tiene un vector propio ψ_T con valor propio t tal que $|t| = \|T\|$.

El objetivo de aquí en adelante es encontrar el espacio de estados de la C^* álgebra $\mathcal{B}_0(H)$. Esto conlleva el estudio de algunos subespacios de $\mathcal{B}(H)$ que no son C^* álgebras pero sí ideales de $\mathcal{B}(H)$, excepto por el hecho de no ser cerrados.

Definición 2.5.3. Sea H un espacio de Hilbert. Se define la *norma de Hilbert-Schmidt* de un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ como la cantidad:

$$\|T\|_2^2 = \sum_k \|T(e_k)\|^2, \tag{2.64}$$

donde $\{e_k\}_k$ es un sistema ortonormal completo del espacio H. El conjunto de los operadores $T \in \mathcal{B}(H)$ tales que $\|T\|_2 < \infty$ recibe el nombre de *clase de Hilbert-Schmidt* y se denota por $\mathcal{B}_2(H)$.

Definición 2.5.4. Sea H un espacio de Hilbert. Se define la *norma de traza* de un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ como la cantidad:

$$\|T\|_1 = \left\|(T^*T)^{\frac{1}{4}}\right\|_2^2, \tag{2.65}$$

donde el elemento $(T^*T)^{\frac{1}{4}}$ se define mediante el cálculo funcional continuo del corolario 1.2.6 a partir de la subálgebra $C^*(T^*T, \mathrm{Id}_H)$ de $\mathcal{B}(H)$. El conjunto de operadores tales que $\|T\|_1 < \infty$ recibe el nombre de *clase de traza* y se denota por $\mathcal{B}_1(H)$.

El valor de la norma de Hilbert-Schmidt no depende de la base elegida. Utilizando la notación de Dirac para una base discreta (el caso continuo es análogo) la prueba es inmediata. Si $\{u_i\}_i$ y $\{e_j\}_j$ son dos bases de H:

$$\|T\|_2^2 = \sum_j \|T\,|e_j\rangle\|^2 = \sum_j |\langle e_j|\,T^*T\,|e_j\rangle| = \sum_{i,j} |\langle e_j|u_i\rangle\,\langle u_i|\,T^*T\,|e_j\rangle| = \sum_i \|T\,|u_i\rangle\|^2. \tag{2.66}$$

Por otro lado, para todo $T \in \mathcal{B}_1(H)$ definimos su *traza* como la cantidad:

$$\mathrm{Tr}T = \sum_i \langle e_i\,, T(e_i)\rangle, \tag{2.67}$$

que es finita e independiente de la base. Si $T \notin \mathcal{B}_1(H)$, puede ocurrir que tanto el valor de la traza como su finitud dependa de la base elegida. Recíprocamente, puede probarse que $T \in \mathcal{B}_1(H)$ siempre que $\mathrm{Tr}_+T < \infty$, donde Tr_+ se define en términos de la descomposición 2.26 como $\mathrm{Tr}_+T = \mathrm{Tr}T'_+ - \mathrm{Tr}T'_- + i\mathrm{Tr}T''_+ - i\mathrm{Tr}T''_-$. Para todo $T \in \mathcal{B}_1(H)$ se tiene $\mathrm{Tr}_+T = \mathtt{Tr}T$ y, en general:

$$\|T\|_1 = \mathrm{Tr}|T|, \qquad \|T\|_2 = \mathrm{Tr}|T|^2 = \mathrm{Tr}T^*T, \tag{2.68}$$

donde se define $|T| = \sqrt{T^*T}$ a partir del cálculo funcional continuo.

Proposición 2.5.3. Si H es un espacio de Hilbert, se satisface la relación de contención:

$$\mathcal{B}_f(H) \subset \mathcal{B}_1(H) \subset \mathcal{B}_2(H) \subset \mathcal{B}_0(H) \subset \mathcal{B}(H), \tag{2.69}$$

donde los contenidos son igualdades si y solo si H es de dimensión finita.

Esta cadena de inclusiones suele interpretarse como el análogo no conmutativo de la relación:

$$l_c(X) \subset l_1(X) \subset l_2(X) \subset c_0(X) \subset l_\infty(X), \tag{2.70}$$

donde X es un conjunto infinito. Como $l_1(X) = c_0(X)^*$ y $l_\infty(X) = l_1(X)^* = c_0(X)^{**}$, esta analogía queda reforzada con el siguiente resultado.

Teorema 2.5.4. *Si H es un espacio de Hilbert, entonces:*

$$\mathcal{B}_0(H)^* = \mathcal{B}_1(H) \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_1(H)^* = \mathcal{B}_0(H)^{**} = \mathcal{B}(H). \tag{2.71}$$

De este Teorema se deduce la caracterización del espacio de estados de la C^* álgebra $\mathcal{B}_0(H)$, así como de su espacio de estados puros. Igualmente, se prueba que este álgebra admite una única representación irreducible salvo equivalencia, de manera que todos los estados puros inducen representaciones equivalentes. Esto queda recogido en el siguiente corolario.

Corolario 2.5.5. Sea H un espacio de Hilbert. Entonces,

i) El espacio de estados de la C^* álgebra $\mathcal{B}_0(H)$ de los operadores compactos sobre H consiste en el conjunto de los operadores de clase traza positivos y de traza unidad:

$$\mathcal{S}(\mathcal{B}_0(H)) = \{\rho \in \mathcal{B}_1(H)^+ : \mathrm{Tr}\rho = 1\}. \tag{2.72}$$

Este tipo de operadores suelen denominarse, abusando algo del lenguaje, *matrices de densidad.*

ii) El espacio de estados puros de $\mathcal{B}_0(H)$ es el conjunto de todas las proyecciones a subespacios unidimensionales.

iii) La C^* álgebra $\mathcal{B}_0(H)$ admite una única representación irreducible salvo equivalencia.

El tercer punto de este corolario es un resultado importante en la Teoría de C^* álgebras, pues aplicado al caso finito-dimensional muestra que la C^* álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de las matrices complejas $n \times n$ admite una única representación irreducible salvo equivalencia.

En definitiva, el espacio $\mathcal{B}_0(H)$ de los operadores compactos en un espacio de Hilbert sirve como extensión de la C^* álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ al caso infinito-dimensional. Cuando la dimensión del espacio H es finita, las relaciones de contención de 2.69 son igualdades, de manera que todos los ideales de $\mathcal{B}(H)$ mencionados coinciden entre sí y con el álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. El espacio de estados de $\mathcal{B}_0(H)$ será relevante a la hora de formular la Mecánica Cuántica, pues los axiomas de Dirac-von Neumann postulan que los estados de un sistema cuántico son los estados de dicho álgebra, pudiendo identificar cada estado puro con el elemento de norma 1 del subespacio de H al que proyecta. Sobre esto volveremos en el capítulo final, mostrando cómo una formulación basada en C^* álgebras permite, a través de la correspondencia que establece el Teorema de Gelfand-Naimark 2.3.4, derivar el contexto matemático del álgebra $\mathcal{B}_0(H)$.

Capítulo 3

Formulación de las Mecánicas Clásica y Cuántica

Lo primero que salta a la vista cuando uno se familiariza con la formulación usual de la Mecánica Cuántica es su marcada diferencia con el formalismo matemático de la Mecánica Clásica, que nos resulta mucho más natural: se comienza con varios axiomas físicamente muy intuitivos, dados por la Mecánica de Newton, y se prueba que son equivalentes al formalismo Hamiltoniano, que es más conveniente desde un punto de vista matemático. Sin embargo, la Mecánica Cuántica se introduce a través del enunciado de los axiomas de Dirac-von Neumann que, aunque matemáticamente son apropiados, no tienen una justificación física clara o intuitiva.

Lo que pretendemos aquí es introducir axiomas equivalentes para formular la Mecánica Cuántica, mucho más naturales, por su similitud con la Mecánica Clásica, que los que se dan usualmente. Para justificarlos, comenzaremos con una reformulación algebraica del formalismo matemático de la Mecánica Clásica que mantenga el carácter intuitivo. A continuación, se modificarán ligeramente estos enunciados para que sean compatibles con los hechos experimentales, obteniendo unos axiomas más generales que permitan formular de manera simultánea las Mecánicas Clásica y Cuántica. Probaremos además que, a partir de esta formulación, y usando los resultados más relevantes de la Teoría de C^* álgebras, se obtienen los conocidos axiomas de Dirac-von Neumann.

3.1. Reformulación algebraica de la Mecánica Clásica

En Mecánica Clásica, el estado físico de un sistema material en un instante t está determinado por la posición $\mathbf{r}(x, y, z)$ y la velocidad $\mathbf{v}(x, y, z)$ de cada una de sus partículas constituyentes. Para describir tales sistemas, se introducen ciertas coordenadas generalizadas $q_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$ y sus derivadas con respecto al tiempo $\dot{q}_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$; las velocidades generalizadas. El cálculo de $q_i(t)$ y $\dot{q}_i(t)$ permite conocer, en cada instante, la posición y la velocidad de cada partícula o componente del sistema. El espacio sobre el que se definen las coordenadas generalizadas recibe el nombre de *espacio de configuración* y tiene estructura de variedad diferenciable. Un ejemplo sencillo es el péndulo simple, cuyo espacio de configuración es la circunferencia S^1. El toro $S^1 \times S^1$ es el espacio de configuración del doble péndulo y, de manera más general, si un sistema físico está compuesto por dos sistemas con coordenadas generalizadas independientes, su espacio de configuración es la variedad producto de los espacios de configuración de cada subsistema. Además, esto es cierto incluso si existen vínculos dinámicos (por ejemplo, de tipo gravitacional o elástico) entre los sistemas componentes.

A partir del Lagrangiano $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$, se define el momento conjugado p_i de cada una de las coordenadas generalizadas:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}. \tag{3.1}$$

Los $q_i(t)$ y $p_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, reciben el nombre de variables dinámicas fundamentales y conforman el *espacio de fases* del sistema físico, que es el fibrado cotangente[1] del espacio de configuración. A este espacio se le puede dotar de una geometría simpléctica con la que se formula correctamente la Mecánica Hamiltoniana. Por ejemplo, el espacio de fases del péndulo simple es el cilindro $S^1 \times \mathbf{R}$. Los puntos del espacio de fases reciben el nombre de *estados* y suelen denotarse mediante los pares (q, p).

[1]Dada una variedad diferenciable n-dimensional X, puede construirse en cada punto $p \in X$ el espacio tangente a X en p, que tiene estructura de $\mathbf{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Su espacio dual se denomina espacio cotangante a X en p y la unión disjunta de todos los espacios cotangentes a X en cada punto forma el fibrado cotangente de X, que además puede dotarse de estructura de variedad diferenciable $2n$-dimensional.

Todas las magnitudes físicas asociadas a un sistema que podemos medir con precisión arbitraria reciben el nombre de *observables*. Para caracterizarlos matemáticamente habrá que tener en cuenta algunas restricciones. En primer lugar, un observable depende del estado del sistema, es decir, deberá ser una función de q y p. En segundo lugar, dicha función deberá tomar valores reales y, por último, tendremos que encontrar un modo de asegurar que el error en la medida de un observable sea arbitrariamente pequeño. Para esto asumiremos que siempre es posible medir simultáneamente q y p con una precisión arbitraria. Supongamos pues que queremos medir el valor de una función f definida sobre el espacio de fases X y que toma valores reales con un error menor que $\varepsilon > 0$. Como el error al medir q y p puede hacerse arbitrariamente pequeño, vamos a poder acotarlo por un $\delta > 0$ tal que el valor de f resultante al evaluar el observable en los (q, p) medidos respete el margen de error ε. En términos matemáticos, la condición que estamos exigiendo es la siguiente: para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$f\left(B_X((q,p),\delta)\right) \subset B_{\mathbf{R}}(f(q,p),\varepsilon) \quad \forall\,(q,p) \in X, \tag{3.2}$$

es decir, que la función $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ sea continua. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.1.1. Sea X el espacio de fases de un sistema clásico. Se define un *observable* en X como una función continua de X en $\mathbf{R}$.

Recordando cómo se construye la C^* álgebra de las funciones continuas complejas $C(X)$ en la sección 1.1.2 y que el espacio de fases es un espacio topológico T_2 que podemos considerar compacto,[2] el conjunto de los observables clásicos queda caracterizado con el enunciado siguiente.

Teorema 3.1.1 (Caracterización de los observables clásicos)**.** *El conjunto de observables de un sistema clásico es el conjunto de elementos hermíticos de una C^* álgebra conmutativa y unital.*

Observación 3.1.1. La C^* álgebra $C(X)$ es separable, ya que, por el Teorema de Stone-Weierstrass, el conjunto de todos los polinomios en q y p con partes real e imaginaria racionales forma un subconjunto numerable denso de $C(X)$.

[2]El espacio de fases construido como un fibrado cotagente nunca es compacto. No obstante, como los valores que toman la posición y el momento de las partículas, en mediciones realistas, no superan ciertos valores suficientemente grandes, podemos considerar a todos los efectos que el espacio de fases es compacto.

Repitamos un procedimiento similar para caracterizar los estados (puros) de un sistema clásico, interpretándolos como funcionales lineales sobre el conjunto de observables.

Definición 3.1.2. Sea X el espacio de fases de un sistema clásico y $\mathcal{A}$ su C^* álgebra $C(X)$ de observables[3]. Para cada estado $(q,p) \in X$ se define el funcional lineal:

$$\begin{array}{rccc} \omega_{(q,p)}: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & a & \longmapsto & a(q,p), \end{array} \tag{3.3}$$

que recibe el nombre de *estado (puro)* en $\mathcal{A}$.

Como consecuencia, en Mecánica Clásica, a diferencia de la Cuántica, los observables tienen valores bien definidos cuando el sistema se encuentra en un estado puro (un punto en el espacio de fases). Sin embargo, ocurre con frecuencia que el estado (puro) de un sistema no es conocido con exactitud, sobre todo en sistemas complejos formados por un gran número de partículas. Por eso, la Mecánica Estadística clásica considera que tales sistemas son descritos por una distribución de probabilidad en el espacio de fases (por ejemplo, las distribuciones canónica, microcanónica, etc.). Pero, como es bien sabido del capítulo precedente, el teorema de Riesz permite identificar también a las distribuciones de probabilidad con los funcionales lineales positivos normalizados sobre el álgebra $\mathcal{A}$, de tal manera que cada estado puro $\omega(q,p)$ se corresponde con la medida de probabilidad concentrada en el punto (q,p). Consecuentemente, podemos dar la siguiente definición general de estado clásico:

Teorema 3.1.2 (Caracterización de los estados clásicos)**.** *El conjunto de los estados de un sistema clásico es el conjunto de funcionales* $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ *lineales, normalizados y positivos sobre una* C^* *álgebra conmutativa* $\mathcal{A}$.

Demostración. La C^* álgebra $\mathcal{A}$ es la que proporciona el Teorema 3.1.1, es decir, el álgebra de funciones continuas complejas $C(X)$. Si $a \in \mathcal{A}$ es positivo, tomará valores reales y tendrá espectro positivo, luego $a(q,p) \in \mathbf{C}^+$. La normalización se prueba por doble desigualdad. En

[3] Abusando del lenguaje, nos referiremos a esta C^* álgebra como álgebra de observables, teniendo siempre en cuenta que estos son únicamente sus elementos hermíticos.

primer lugar:

$$\left\|\omega_{(q,p)}\right\| = \sup_{a\in B_{\mathcal{A}}} \left|\omega_{(q,p)}(a)\right| \geq \left|\omega_{(q,p)}(1_{\mathcal{A}})\right| = 1, \tag{3.4}$$

y, para cada $a \in \mathcal{A}$:

$$\left|\omega_{(q,p)}(a)\right| = |a(q,p)| \leq \sup_{(q,p)\in X} a(q,p) = \|a\|, \tag{3.5}$$

luego $\left\|\omega_{(q,p)}\right\| \leq 1$ y por tanto el estado está normalizado. □

Hemos caracterizado desde un punto de vista algebraico los estados y observables de un sistema clásico. A cada sistema físico se le asigna una C^* álgebra conmutativa y unital cuyos elementos hermíticos serán los observables y cuyos funcionales lineales, positivos y normalizados serán los estados. Esta interpretación se deduce de manera natural de la formulación tradicional de la Mecánica Clásica, que surge a partir de la Mecánica de Newton. No obstante, sabemos que el formalismo clásico deja de ser válido para describir el comportamiento de un sistema cuántico, de modo que la caracterización anterior deberá ser modificada si buscamos construir una formulación más general.

Para determinar cómo llevar a tal modificación, recordemos la correspondencia encontrada en el teorema 2.2.1 entre los estados de un sistema clásico y las medidas de probabilidad sobre su espacio de fases. De acuerdo a cómo se construye esta identificación, tiene sentido considerar el valor $\omega(f)$ de (2.13) como el *valor esperado* del observable f en el estado ω, pues corresponde con su integral en todo el espacio muestral respecto a la medida de probabilidad asociada a ω. Esto nos lleva a definir la *varianza* de un observable a respecto al estado ω como la cantidad:

$$\sigma_\omega(a)^2 = \omega\left[(a - \omega(a))^2\right], \tag{3.6}$$

que, tal y como hemos construido los estados puros clásicos en 3.1.2, es siempre nula. Sin embargo, esto no ocurre en general en sistemas cuánticos. Por ejemplo, la posición de una partícula en un pozo de potencial cuadrado tiene varianza no nula respecto al estado fundamental[4], no encajando en nuestra definición de estado. Para incluir este tipo de situaciones, habrá que descartar la idea de que los estados puros son puntos de una variedad simpléctica, en cuyo caso no tiene sentido definirlos como funcionales lineales tales que $\omega_{(q,p)}(a) = a(q,p)$. No obstante, sigue siendo natural -y matemáticamente posible- definir el conjunto de estados de un sistema como la colección de funcionales lineales, positivos y normalizados de un álgebra de observables, que tendrá que ser construida en concordancia con los hechos experimentales, como la desigualdad:

$$\sigma_\omega(p)\sigma_\omega(q) \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{3.7}$$

que es cierta para cualquier estado ω.

Buscamos determinar un álgebra de observables a partir de la cual pueda deducirse la relación anterior, lo que nos sugiere que esta C^* álgebra deberá ser no conmutativa. En efecto, si consideramos una C^* álgebra no conmutativa $\mathcal{A}$ y a los observables como sus elementos hermíticos, fijado un estado ω en $\mathcal{A}$ como un funcional lineal, positivo y normalizado y dados dos elementos hermíticos $a, b \in \mathcal{A}$, asumiendo sin pérdida de generalidad que $\omega(a) = \omega(b) = 0$ tenemos que:

$$\sigma_\omega(a)^2\sigma_\omega(b)^2 = \omega(a^2)\omega(b^2). \tag{3.8}$$

Por ser a y b hermíticos tenemos $(\alpha a + i\beta b)^* = \alpha a - i\beta b$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, luego por la positividad de ω se tiene que:

$$\omega((\alpha a - i\beta b)(\alpha a + i\beta b)) = \omega(a^2)\alpha^2 + \omega(i[a,b])\alpha\beta + \omega(b^2)\beta^2 \geq 0, \tag{3.9}$$

donde $[a, b]$ denota el conmutador de a y b. Definiendo:

$$M = \begin{pmatrix} \omega(a^2) & \frac{1}{2}\omega(i[a,b]) \\ \frac{1}{2}\omega(i[a,b]) & \omega(b^2) \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

[4] El estado fundamental de un sistema cuántico es el estado de menor energía.

la desigualdad 3.9 se reescribe como $\alpha^T M\alpha \geq 0$, luego M es semidefinida positiva y, por tanto:

$$\det M = \omega(a^2)\omega(b^2) - \frac{1}{4}\omega(i[a,b])^2 \geq 0. \tag{3.11}$$

Finalmente:

$$\sigma_\omega(a)\sigma_\omega(b) \geq \frac{1}{2}|\omega([a,b])|, \tag{3.12}$$

para todo funcional lineal, positivo y normalizado ω sobre la C^* álgebra $\mathcal{A}$ y todo par de elementos hermíticos $a, b \in \mathcal{A}$. La desigualdad (3.12) se conoce como *principio de incertidumbre de Heisenberg* y, en particular, considerando $[q,p] = \alpha\hbar 1_{\mathcal{A}}$ con $\alpha \in \mathbf{C}$ de norma 1, la desigualdad (3.7) se obtiene como caso particular. En definitiva, si construimos una formulación en la que los observables se toman como los elementos hermíticos de una C^* álgebra (no conmutativa), el resultado experimental (3.7) es ahora deducible bajo este marco. Esto nos sugiere modificar tan solo ligeramente la caracterización del teorema 3.1.1, eliminando la conmutatividad del álgebra y tomándo este enunciado como *definición* de un observable para un sistema cuántico general, definiendo los estados a partir de la misma idea.

3.2. Estados y observables de un sistema cuántico

Recapitulemos lo desarrollado hasta este punto. En primer lugar, hemos tomado la formulación Hamiltoniana de la Mecánica Clásica, que puede probarse equivalente al formalismo intuitivo de la Mecánica de Newton, y hemos examinado sus propiedades matemáticas para reformularla en términos de C^* álgebras conmutativas. A partir de la construcción de los estados y los observables de un sistema, hemos encontrado que el modo de extender la formulación previa a otra más general que incluya a los sistemas cuánticos pasa por eliminar la conmutatividad del álgebra, para a continuación enunciar las caracterizaciones obtenidas con esta ligera modificación como definiciones de estado y observable cuántico. Con esto, formulamos los dos primeros axiomas de la Mecánica Cuántica.

Axioma 3.2.1 (*Observables cuánticos*)**.** El espacio de fases de un sistema cuántico es un espacio no conmutativo (compacto) con una C^* álgebra (unital) asociada $\mathcal{A}$. Los observables del sistema se corresponden con los elementos hermíticos de $\mathcal{A}$.

Axioma 3.2.2 (*Estados cuánticos*)**.** El conjunto de los estados de un sistema cuántico es el conjunto de los estados de la C^* álgebra $\mathcal{A}$.

Nótese que, mientras que en el caso clásico todos los estados estaban normalizados, ahora no es necesario asumir esa condición. De este modo no estamos suponiendo que los estados de un sistema cuántico estén acotados, sino que esto se prueba como consecuencia de la definición (recuérdese la proposición 2.2.2).

Con estos dos axiomas establecemos la base de una construcción que permite formular de manera simultánea las Mecánicas Clásica y Cuántica, donde la única diferencia entre ambas es la sutil conmutatividad de la C^* álgebra de observables. Cuando es conmutativa, queda establecida de manera automática su correspondencia con el espacio de fases del sistema clásico, de manera que todas sus propiedades geométricas y topológicas pueden reconstruirse a partir de su C^* álgebra asociada. Por ejemplo, los estados del álgebra serán las medidas de probabilidad sobre el espacio de fases y, en particular, los estados puros se identificarán con los puntos de dicho espacio. Como vemos aquí, la formulación cuántica se fundamenta en el planteamiento base de la *Geometría no conmutativa*, que extiende esta equivalencia categórica eliminando la conmutatividad y *define* las propiedades del espacio cuántico a partir del álgebra de observables.

Estos dos axiomas constituyen los pilares de la Teoría cuántica, pues definen los conceptos de estado y observable. Antes de continuar con el resto de axiomas, veamos que los postulados tradicionales de *Dirac-von Neumann* encuentran bajo este marco su formulación natural, es decir, que las nociones usuales de estado (como los elementos de un espacio de Hilbert separable) y observable (como los operadores lineales autoadjuntos en dicho espacio) surgen a partir de esta formulación algebraica, que nace del estudio y extensión del formalismo de la Mecánica Clásica. Enunciemos entonces los tres primeros postulados de la Teoría cuántica que deduciremos a continuación a partir de nuestra formulación general.

Postulado 3.2.1 (*Primer postulado de Dirac-von Neumann*)**.** A cada sistema cuántico se le asocia un espacio de Hilbert H complejo separable.

Postulado 3.2.2 (*Segundo postulado de Dirac-von Neumann*)**.** Cada observable del sistema cuántico es un operador lineal y autoadjunto en H.

Postulado 3.2.3 (*Tercer postulado de Dirac-von Neumann*)**.** Los estados de un sistema cuántico son los operadores positivos de traza 1 en H.

El tercero de estos postulados merece algún comentario previo, pues no suele ser enunciado como aquí aparece. En [2], se postula que un estado del sistema físico es un vector unitario del espacio de Hilbert asociado al sistema, y que dos vectores unitarios que se diferencien en un factor de módulo 1 representan el mismo estado físico. Lo que en realidad se está haciendo es formular el tercer postulado para estados *puros*, construyendo posteriormente el resto de estados mezcla como combinaciones lineales convexas de los primeros (esto es posible en la Teoría de C^* álgebras como consecuencia del Teorema de Krein-Milman 2.4.8). Recordando el corolario 2.5.5, el postulado 3.2.3 define los estados del sistema cuántico como los estados de la C^* álgebra $\mathcal{B}_0(H)$ de los operadores compactos sobre H, cuyos estados puros son las proyecciones a los subespacios unidimensionales. De este modo, puede identificarse cada estado puro con un elemento del espacio de Hilbert de norma 1 contenido en el subespacio unidimensional al que proyecta el estado. El postulado que aquí presentamos resulta más conveniente desde el punto de vista matemático y es equivalente al introducido usualmente cuando el estado es puro.

Antes de mostrar cómo se obtienen los tres postulados anteriores a partir de la formulación general, necesitamos probar dos resultados auxiliares de la Teoría de C^* álgebras que son ciertos en C^* álgebras separables y unitales.

Proposición 3.2.1. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra separable y unital, ω un estado en $\mathcal{A}$ y $(\pi_\omega\,, H_\omega)$ la representación GNS que induce ω, con vector cíclico Ω_ω. Entonces, existe un operador $T_\omega \in \mathcal{B}(H_\omega)$ positivo y de traza unidad tal que:

$$\omega(a) = \langle \Omega_\omega\,, \pi_\omega(a)(\Omega_\omega) \rangle_\omega = \mathrm{Tr}(T_\omega \pi_\omega(a)) \quad \forall\, a \in \mathcal{A}, \tag{3.13}$$

donde $\langle\, ,\rangle_\omega$ es el producto escalar en H_ω definido en 2.45.

Demostración. La primera igualdad ya se había probado en 2.49 al introducir la construcción GNS. Para probar la segunda, notemos en primer lugar que H_ω es separable. Como $\mathcal{A}$ es separable, $\pi_\omega(\mathcal{A})(\Omega_\omega)$ también lo será. Pero $\pi_\omega(\mathcal{A})(\Omega_\omega)$ es denso en H_ω por ser Ω_ω cíclico, luego H_ω será separable y tendrá, por tanto, una base ortonormal numerable $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Escribimos Ω_ω en términos de dicha base como:

$$\Omega_\omega = \sum_{n\in\mathbf{N}} c_n e_n, \tag{3.14}$$

donde $c_n \in \mathbf{C}$ para cada $n \in \mathbf{N}$ y definimos el operador $T_\omega \in \mathcal{B}(H_\omega)$ a partir de la relación:

$$\langle e_n\,, T_\omega(e_m)\rangle_\omega = c_m^* c_n. \tag{3.15}$$

Veamos que T_ω satisface 3.13. Dado $a \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\omega(a) = \left\langle \sum_{m\in\mathbf{N}} c_m e_m\,, \pi_\omega(a)\left(\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n e_n\right)\right\rangle_\omega = \left\langle \sum_{m\in\mathbf{N}} c_m e_m\,, \sum_{n\in\mathbf{N}} c_n \pi_\omega(a)(e_n)\right\rangle_\omega = \\
= \sum_{n\in\mathbf{N}}\sum_{m\in\mathbf{N}} c_m^* c_n \langle e_m\,, \pi_\omega(a)(e_n)\rangle_\omega = \sum_{n\in\mathbf{N}} \left\langle e_m\,, \sum_{m\in\mathbf{N}} c_m^* c_n \pi_\omega(a)(e_n)\right\rangle_\omega = \\
= \sum_{n\in\mathbf{N}} \left\langle e_m\,, \pi_\omega(a)\left(\sum_{m\in\mathbf{N}} c_m^* c_n e_n\right)\right\rangle_\omega = \sum_{n\in\mathbf{N}} \langle e_m\,, \pi_\omega(a) T_\omega(e_m)\rangle_\omega = \mathrm{Tr}(T_\omega \pi_\omega(a)),
\end{aligned}$$

de acuerdo a cómo se definía la traza de un operador en 2.67. Tomando $a = 1_\mathcal{A}$ se tiene:

$$\omega(1_\mathcal{A}) = 1 = \mathrm{Tr}(T_\omega \pi_\omega(1_\mathcal{A})) = \mathrm{Tr} T_\omega. \tag{3.16}$$

Finalmente, veamos que T_ω es positivo viendo que puede escribirse como $T = B^*B$ para algún $B \in \mathcal{B}(H)$. Definimos B a partir de la relación $\langle e_m\,, B(e_n)\rangle_\omega = c_m^* \delta_{m1}$, de manera que:

$$\langle e_n\,, B^*B(e_m)\rangle_\omega = \langle B(e_n)\,, B(e_m)\rangle_\omega = \langle c_n^* e_1\,, c_m^* e_1\rangle_\omega = c_m^* c_n, \tag{3.17}$$

luego $T = B^*B$ y por tanto T es positivo. □

El segundo resultado es un corolario del Teorema de Gelfand-Naimark 2.3.4 para C^* álgebras separables, que utiliza la proposición anterior para establecer una correspondencia entre los estados del álgebra y los funcionales positivos y de traza unidad en $\mathcal{B}(H_u)$, es decir, entre los estados de la C^* álgebra y los estados del espacio $\mathcal{B}_0(H_u)$ de los operadores compactos.

Proposición 3.2.2. Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra separable y unital y sea H el espacio de Hilbert dado por el Teorema de Gelfand-Naimark 2.3.4. Entonces, existe una correspondencia biyectiva entre los estados de $\mathcal{A}$ y los estados de $\mathcal{B}_0(H)$.

Demostración. De acuerdo a la demostración del Teorema 2.3.4, el homomorfismo isométrico viene dado por la representación universal de $\mathcal{A}$ en el espacio de Hilbert H_u, construida como la suma directa de todas las representaciones GNS de $\mathcal{A}$ para cada estado $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{rccl} \pi_u\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B}(H_u) \\ & a & \longmapsto & \pi_u(a) = \left(\pi_\omega(a)\right)_{\omega\in\mathcal{S}(\mathcal{A})} . \end{array} \tag{3.18}$$

Si $T \in \mathcal{B}(H)$ es positivo y de traza unidad, es sencillo comprobar que el funcional $\omega(a) = \mathrm{Tr}(T\pi_u(a))$ define un estado en $\mathcal{A}$. Para probar el recíproco hay que tener en cuenta que el espacio de estados $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ es separable cuando lo es $\mathcal{A}$. De este modo, todo estado $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ es límite de una sucesión de estados $\{\omega_n\}_n$ en el subconjunto numerable denso. Para cada uno de los ω_n definimos un operador $O_n \in \mathcal{B}(H_u)$, que coincide con el operador nulo en todas las componentes $\omega \neq \omega_n$ y con el operador T_n en la componente $\omega = \omega_n$, donde T_n es el operador que proporciona la proposición 3.2.1 para el estado ω_n. Con esta construcción, es inmediato comprobar que O_n es lineal, positivo, de traza unidad y que verifica $\mathrm{Tr}(O_n\pi_u(a)) = \omega_n(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Con esto, definimos el operador T_ω como el límite $T_\omega = \lim_n O_n$, que satisface la relación:

$$\omega(a) = \lim_n \omega_n(a) = \mathrm{Tr}(O_n\pi_u(a)) = \mathrm{Tr}(T_\omega\pi_u(a)) \quad \forall\, a \in \mathcal{A}, \tag{3.19}$$

lo que prueba que T_ω es un operador positivo y de traza unidad, es decir, un estado en $\mathcal{B}_0(H_u)$.

□

El Teorema de Gelfand-Naimark 2.3.4 y el resultado anterior proporcionan las herramientas necesarias de la Teoría de C^* álgebras para deducir la construcción usual de la Mecánica Cuántica a partir de la formulación general algebraica, pues asocian a cada C^* álgebra separable y unital un espacio de Hilbert (postulado 3.2.1) construido a partir de todas sus representaciones, en el que de los axiomas 3.2.1 y 3.2.2 se derivan los postulados de Dirac-von Neumann. Por un lado, los elementos hermíticos quedan identificados por medio del isomorfismo 3.18 con los operadores lineales y autoadjuntos del espacio de Hilbert, es decir, con los observables del postulado 3.2.2 y, por otro, los estados de la C^* álgebra se corresponden biunívocamente con los estados del álgebra de operadores compactos, es decir, con los operadores positivos de traza unidad en el espacio de Hilbert asociado (postulado 3.2.3).

En definitiva, la construcción que nos proporciona la Teoría de C^* álgebras supone una extensión del marco matemático de los espacios de Hilbert usualmente presentada, que nos da una visión más global, logrando encuadrar simultáneamente las Mecánicas Clásica y Cuántica. Cuando el álgebra es no conmutativa, esta formulación deriva hacia el marco de los operadores compactos $B_0(H)$ y, cuando hay conmutatividad, el Teorema de Gelfand-Naimark establece su correspondencia con el espacio de fases clásico.

Cabe remarcar de nuevo la importancia de la construcción GNS y, en consecuencia, del Teorema de Gelfand-Naimark. Además de su relevancia matemática en la Teoría de C^* álgebras, este resultado pasa a considerar el espacio de Hilbert como un concepto *derivado* de la Teoría cuántica, siendo ahora la C^* álgebra de observables la que tiene el papel de concepto *fundamental.*

3.3. Medidas de probabilidad en un sistema cuántico

Al ser la Mecánica Cuántica una teoría intrínsecamente probabilística, vamos a necesitar ciertas herramientas de la Teoría de la medida que permitan extender los axiomas de Dirac-von Neumann relativos a las medidas de observables cuando el sistema se encuentra en un estado determinado. Esta parte se fundamentará en el Teorema de descomposición espectral de von

Neumann, de gran importancia en la formulación de la Mecánica Cuántica y cuyo enunciado requiere de algunos conceptos previos.

Definición 3.3.1. Una *medida espectral* en $\mathbf{R}$ es una aplicación $\mathrm{P} : \mathscr{B}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$, donde $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ denota la σ-álgebra de Borel en $\mathbf{R}$, que satisface las propiedades:

i) P es un proyector en $\mathcal{B}(H)$,

ii) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$, $\mathrm{P}(\mathbf{R}) = \mathrm{Id}_H$,

iii) Si $\{E_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es una colección de borelianos disjuntos:

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(E_i), \tag{3.20}$$

en la topología fuerte de $\mathcal{B}(H)$.

Observación 3.3.1. Toda medida espectral satisface $\mathrm{P}(E_1)\mathrm{P}(E_2) = \mathrm{P}(E_1 \cap E_2)$ para todo par de borelianos E_1 y E_2.

Definición 3.3.2. Dada una medida espectral P en $\mathbf{R}$, la aplicación:

$$\begin{aligned} P\colon\ \mathbf{R} &\longrightarrow \mathcal{B}(H) \\ \lambda &\longmapsto P(\lambda) = \mathrm{P}((-\infty, \lambda)), \end{aligned} \tag{3.21}$$

recibe el nombre de *resolución de la identidad*.

El concepto de resolución de la identidad es el análogo al de función de distribución en la Teoría de la probabilidad usual. Toda resolución de la identidad P queda caracterizada por las propiedades siguientes:

i) $P(\lambda)P(\mu) = P(\min\{\lambda, \mu\}) \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$,

ii) $\lim_{\lambda\to-\infty} P(\lambda) = 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} P(\lambda) = \mathrm{Id}_H$,

iii) $\lim_{\lambda\to\mu} P(\lambda) = P(\mu) \quad \forall\, \mu < \lambda$.

Para cada elemento del espacio de Hilbert $\psi \in H$, la resolución de la identidad P define la función de distribución de una medida en $\mathbf{R}$ dada por $\langle P(\lambda)(\psi), \psi\rangle$, correspondiente a una medida de probabilidad cuando $\|\psi\| = 1$. Estamos ya en condiciones de enunciar el Teorema de descomposición espectral de von Neumann.

Teorema 3.3.1 (Descomposición espectral de von Neumann)**.** *Sea H un espacio de Hilbert. Para cada operador autoadjunto $T \in \mathcal{B}(H)$ existe una única resolución de la identidad P tal que, para cada función $f \in C(\sigma(T))$, el operador $f(T)$ definido mediante el cálculo funcional continuo en $C^*(T, \mathrm{Id}_H)$ tiene el dominio denso:*

$$D(f(T)) = \left\{\psi \in H : \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\langle P(\lambda)(\psi), \psi\rangle < \infty\right\}, \tag{3.22}$$

y verifica:

$$f(T)(\psi) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dP(\lambda)\right)(\psi) \quad \forall\, \psi \in H, \tag{3.23}$$

donde la integral de 3.22 es la integral de Riemmann-Stieltjes (0.4) y la integral de 3.23 es su generalización para funciones reales de variable real respecto de funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathcal{B}(H)$[5]*. Además, el soporte de la medida espectral correspondiente* P *coincide con el espectro de T:*

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \mathrm{P}((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)) \neq 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0. \tag{3.24}$$

El teorema anterior puede generalizarse para cualquier C^* álgebra, extendiendo previamente los conceptos de medida espectral y resolución de la identidad (basta con sustituir $\mathcal{B}(H)$ por una C^* álgebra general y construir los conceptos de manera análoga).

Teorema 3.3.2 (Descomposición espectral de von Neumann, caso general)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una C^* álgebra. Para cada elemento hermítico $a \in \mathcal{A}$ existe una única resolución de la identidad P tal que, para cada función $f \in C(\sigma(a))$, el elemento $f(a)$ definido mediante el cálculo funcional*

[5]Esta extensión es natural de acuerdo a cómo se construyen las sumas (20) tomando su límite en la topología fuerte de $\mathcal{B}(H)$. De esta manera, la integral resultante es un operador de $\mathcal{B}(H)$.

continuo en $C^*(a, 1_{\mathcal{A}})$ satisface:

$$f(a) = \int_{\sigma(a)} f(\lambda) dP(\lambda), \tag{3.25}$$

donde la integral 3.25 es la generalización de la integral de Riemann-Stieltjes para funciones reales de variable real respecto de funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathcal{A}$. En particular, tomando $f = \mathrm{Id}_{C(\sigma(a))}$, la imagen de a por cualquier estado $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ puede obtenerse como:

$$\omega(a) = \int_{\sigma(a)} \lambda \omega(dP(\lambda)), \tag{3.26}$$

donde la integral anterior se entiende como el límite en la norma de cualquier partición de $\sigma(a)$ de la imagen por ω de la suma (20) bajo estas condiciones.

Axioma 3.3.1. Dado un sistema cuántico y su C^* álgebra de observables $\mathcal{A}$, el resultado de la medida de un observable $a \in \mathcal{A}$ cuando el sistema se encuentra preparado en el estado $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ no puede predecirse. Los valores de los posibles resultados pertenecerán al espectro $\sigma(a)$ del observable y la probabilidad de cada boreliano viene dada por la medida de probabilidad $\omega(dP(\lambda))$ que proporciona el Teorema 3.3.2. El valor esperado del observable a cuando el sistema se encuentra en el estado ω viene dado por:

$$\langle a \rangle_\omega = \int_{\sigma(a)} \lambda \omega(dP(\lambda)) = \omega(a), \tag{3.27}$$

y la varianza es:

$$\Delta_\omega(a) = \langle (a - \langle a \rangle_\omega)^2 \rangle_\omega = \langle a^2 \rangle_\omega - \langle a \rangle_\omega^2 = \omega(a^2) - \omega(a)^2. \tag{3.28}$$

Es importante remarcar que en esta interpretación estadística de la Mecánica Cuántica estamos asumiendo que un experimento puede repetirse muchas veces de manera indepediente, es decir, que podemos extraer una muestra aleatoria simple de tamaño arbitrario a partir del observable cuando el sistema se encuentra en un estado fijo y obtener a partir de esta la distribución de probabilidad empírica, que converge a la teórica para un número infinito de repeticiones.

La correspondencia establecida en la sección anterior entre los estados y observables de $\mathcal{A}$ y sus operadores asociados en el marco de los axiomas de Dirac-von Neumann permite obtener, a partir del axioma 3.3.1, la expresión usual del valor esperado de un observable cuando el sistema se encuentra preparado en un estado determinado. Sea $a \in \mathcal{A}$ un observable y ω un estado del sistema. De acuerdo a la proposición 3.2.2, existe un operador $T_\omega \in \mathcal{B}_0(H)$ tal que $\omega(a) = \mathrm{Tr}(T_\omega \pi_u(a))$, siendo $\pi_u(a)$ el operador autoadjunto de $\mathcal{B}(H)$ asociado al observable a, que denotaremos por O_a. Tenemos entonces, dada una base $\{e_n\}_n$ del espacio de Hilbert, que

$$\omega(a) = \mathrm{Tr}(T_\omega O_a) = \sum_n \langle e_n| T_\omega O_a |e_n\rangle . \tag{3.29}$$

Supongamos por ejemplo que el estado ω es un estado puro, luego su operador asociado T_ω será un proyector a un subespacio de H unidimensional con vector normalizado ψ_ω, de modo que $T_\omega = |\psi_\omega\rangle \langle\psi_\omega|$ y:

$$\sum_n \langle e_n| T_\omega O_a |e_n\rangle = \sum_n \langle e_n|\psi_\omega\rangle \langle\psi_\omega| O_a |e_n\rangle = \langle\psi_\omega| O_a |\psi_\omega\rangle = \langle O_a\rangle_{\psi_\omega}. \tag{3.30}$$

Es interesante recordar en este punto el resultado de la proposición 2.4.9, que tiene ahora una traducción física inmediata. Dado un observable $a \in \mathcal{A}$ y un posible valor z de dicho observable, es posible preparar el sistema en un estado puro tal que el valor esperado del observable sea igual a z. Además, si z pertenece al espectro puntual, se puede preparar el sistema en un estado puro en el que la medida de a dé exactamente z, es decir, tenga varianza nula.

Este axioma nos permite igualmente probar que los estados puros de un sistema clásico tienen siempre varianza nula. Esto es inmediato recordando que, en el caso conmutativo, los estados puros coinciden con el espacio estructural de la C^* álgebra de observables, es decir, son $*$-homomorfismos unitales y por tanto 3.28 es automáticamente nula. Esto supone una de las grandes diferencias entre las Mecánicas Clásica y Cuántica y explica por qué esta última tiene una naturaleza probabilística intrínseca.

3.4. Evolución temporal en la imagen de Heisenberg

La descripción de la dinámica de un sistema cuántico tendrá que partir, al igual que el resto de postulados, de un replanteamiento de la formulación clásica en términos algebraicos. Considerando un sistema clásico regido por una C^* álgebra conmutativa de observables, existen dos descripciones principales de su dinámica. La *imagen de Hamilton* establece la independencia temporal de los estados y la evolución de los observables de acuerdo a la ecuación de movimiento de Hamilton:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \forall\, \omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A}), \qquad \frac{da}{dt} = \{H, a\} \quad \forall\, a \in \mathcal{A} \text{ hermítico.} \tag{3.31}$$

Por el contrario, la *imagen de Liouville* afirma que no son los observables quienes presentan una evolución temporal sino los estados, que se rigen por la ecuación de movimiento de Liouville:

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad \forall\, a \in \mathcal{A} \text{ hermítico,} \qquad \frac{d\rho}{dt} = -\{H, \rho\} \quad \forall\, \rho(x)dx \in \mathcal{S}(\mathcal{A}), \tag{3.32}$$

donde ρ es la derivada de Radon-Nikodim de la medida asociada a ω respecto de la medida de volumen físico. En ambos casos, $\{\,,\}$ denota el corchete de Poisson y H denota el Hamiltoniano del sistema. En analogía con el caso clásico, postularemos que la evolución temporal de un sistema cuántico está completamente determinada por un observable especial $H \in \mathcal{A}$, denominado *Hamiltoniano*. De acuerdo a los dos planteamientos anteriores, podemos construir esta extensión con el enfoque de Hamilton (imagen de Heisenberg) o con el de Liouville (imagen de Schrödinger). Esta última, posterior a la primera, establece que los estados de un sistema cuántico evolucionan temporalmente, mientras que los observables son invariantes, y para su construcción son necesarias herramientas adicionales de Dinámica y Geometría Diferencial no conmutativas. No obstante, se prueba que es equivalente a la imagen de Heisenberg, que desarrollaremos aquí y que se basa en considerar a los observables como únicos objetos que evolucionan con el tiempo.

Consideremos por tanto una C^* álgebra cuyos elementos hermíticos son los observables de un sistema cuántico. Postulamos entonces que los estados de $\mathcal{A}$ no dependen del tiempo y que los observables satisfacen la ecuación de movimiento de Heisenberg:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \forall\, \omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A}), \qquad \frac{da}{dt} = \{H, a\}_\hbar = \frac{i}{\hbar}[H, a] \quad \forall\, a \in \mathcal{A} \text{ hermítico.} \tag{3.33}$$

Nótese que lo que estamos haciendo es *cuantizar*, es decir, estamos cambiando la conmutatividad del producto usual de funciones fg por el producto $f \cdot g = fg + \hbar\{f, g\}/2i$, que claramente es no conmutativo. Veamos que la dinámica del sistema puede postularse desde un punto de vista más global. Para ello, afirmamos que la evolución temporal de los observables está regida por un grupo uniparamétrico de automorfismos de la C^* álgebra $\mathcal{A}$, es decir, por una aplicación:

$$\begin{array}{rccccccc} T(t)\colon & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathcal{A}) & & & & \\ & t & \longmapsto & T_t\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} & \\ & & & & a & \longmapsto & a(t), & \end{array} \tag{3.34}$$

que asigna a cada instante de tiempo $t \in \mathbf{R}$ un automorfismo que establece la evolución de todos los observables del sistema en dicho instante. Más concretamente, la aplicación (3.34) es un homomorfismo local de grupos topológicos continuo.

Recordando la sección 1.2.2, en la que se probó que los automorfismos de una C^* álgebra conmutativa están en correspondencia biunívoca con los homeomorfismos del espacio topológico asociado, tenemos en este punto que la dinámica de un sistema clásico queda determinada por un grupo uniparamétrico de homeomorfismos en el espacio de fases, es decir, por un grupo uniparamétrico de *simetrías* de dicho espacio. Con esta identificación, conseguimos que las simetrías en un espacio cuántico vienen dadas, vía el funtor de Gelfand-Naimark, por los automorfismos de la C^* álgebra asociada.

Recurriendo ahora al Teorema de Gelfand-Naimark 2.3.4, consideremos la C^* álgebra de observables como subálgebra de $\mathcal{B}(H)$ para un cierto espacio de Hilbert H. En este caso, la aplicación (3.34) queda extendida por un grupo uniparamétrico de automorfismos en $\mathcal{B}(H)$:

$$\begin{array}{rcccccccc} T(t)\colon & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathcal{A}) & \hookrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathcal{B}(H)) & & & \\ & t & \longmapsto & & & T_t\colon & \mathcal{B}(H) & \longrightarrow & \mathcal{B}(H) \\ & & & & & & O & \longmapsto & O(t), \end{array} \tag{3.35}$$

de modo que es ahora un grupo uniparamétrico de automorfismos en $\mathcal{B}(H)$ el que determina la dinámica del sistema. Pero todo automorfismo de $\mathcal{B}(H)$ está determinado por un operador unitario[6] en $\mathcal{B}(H)$, es decir, dado $T \in \mathrm{Aut}(\mathcal{B}(H))$, existe un operador unitario $U \in \mathcal{B}(H)$ tal que

$$T(O) = U^{-1}OU \quad \forall\, O \in \mathcal{B}(H). \tag{3.36}$$

De esta manera, podemos extender la aplicación (3.35) al conjunto de operadores unitarios de $\mathcal{B}(H)$, estableciendo entonces que el grupo uniparamétrico $U(t)$ va a determinar por completo la evolución temporal de los observables de un sistema físico de acuerdo a:

$$O_a(t) = U_t^{-1} O_a U_t \quad \forall\, a \in \mathcal{A} \text{ hermítico}, \tag{3.37}$$

donde O_a denota el operador de $\mathcal{B}(H)$ asociado al observable $a \in \mathcal{A}$. Finalmente, por el Teorema de Stone se tiene que todo grupo uniparamétrico fuertemente continuo de operadores unitarios es de la forma:

$$U_t = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} t\mathrm{H}\right\}, \tag{3.38}$$

donde H es un operador autoadjunto sobre $\mathcal{B}(H)$, no necesariamente acotado, que recibe el nombre de *generador infinitesimal* de $U(t)$. Con esta construcción, los operadores U_t verifican la ecuación de movimiento de Heisenberg (3.33) tomando H como operador Hamiltoniano. Toda este desarrollo queda finalmente recogido en el axioma siguiente, con el que concluimos el tratamiento de esta formulación algebraica.

Axioma 3.4.1 (*Imagen de Heisenberg*)**.** La dinámica de un sistema cuántico está descrita por un grupo uniparamétrico de operadores unitarios $U(t)$ en el espacio de Hilbert H que proporciona el Teorema de Gelfand-Naimark 2.3.4 para la C^* álgebra de observables. Los estados del sistema

[6] Este resultado es, en realidad, una consecuencia de resultados más generales en Teoría de anillos de operadores lineales. Si E es un espacio de Banach y $\mathcal{U}(E)$ denota el anillo de operadores lineales en E, dados dos espacios de Banach E_1, E_2, los anillos $\mathcal{U}(E_1)$ y $\mathcal{U}(E_2)$ son algebraicamente isomorfos si y solo si E_1 y E_2 son isomorfos. En ese caso, el isomorfismo viene dado por $V = A^{-1}UA$, donde $U \in \mathcal{U}(E_1)$, $V \in \mathcal{U}(E_2)$ y A es el isomorfismo entre E_1 y E_2. Para una prueba puede consultarse [6].

no evolucionan en el tiempo y la dependencia temporal de los observables está regida por:

$$O_a(t) = U_t^{-1} O_a U_t \quad \forall\, a \in \mathcal{A} \text{ hermítico}, \tag{3.39}$$

donde O_a es el operador en $\mathcal{B}(H)$ asociado al observable $a \in \mathcal{A}$. Infinitesimalmente, la evolución de los observables está descrita por la ecuación de movimiento de Heisenberg:

$$\frac{da}{dt} = \{H, a\}_\hbar = \frac{i}{\hbar}[H, a] \quad \forall\, a \in \mathcal{A} \text{ hermítico}, \tag{3.40}$$

donde el operador Hamiltoniano H es el generador infinitesimal del grupo uniparamétrico $U(t)$.

Apéndice A

Equivalencia categórica entre espacios topológicos y C^* álgebras

Como se ha visto, el Teorema de Gelfand-Naimark establece una correspondencia entre los espacios topológicos compactos y T_2 y las C^* álgebras conmutativas y unitales. En este apéndice se pretende mostrar que esta dualidad trasciende del mero isomorfismo y se eleva a una *equivalencia categórica*, que conecta toda la información relativa al tipo de espacio y hace que hablar de C^* álgebras conmutativas y unitales o de espacios topológicos compactos y T_2 sea estrictamente lo mismo. Las categorías fueron introducidas hacia la mitad del siglo XX para formalizar correspondencias entre distintos tipos de objetos matemáticos[1], en las que se asocian, además de los objetos subyacentes, las aplicaciones apropiadas entre dichos objetos. La definición formal es la siguiente.

Definición A.0.1. Una *categoría* es una cuaterna $\underline{\mathcal{C}} = (\mathrm{Obj}, \mathrm{Hom}, \mathrm{Id}, \circ)$, donde

i) $\mathrm{Obj}(\underline{\mathcal{C}})$ es una clase de objetos,

ii) Para cada $A, B \in \mathrm{Obj}(\underline{\mathcal{C}})$, $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A, B)$ es un *conjunto* de morfismos de A en B,

iii) Para cada $A \in \mathrm{Obj}(\underline{\mathcal{C}})$ existe un morfismo identidad $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A, A)$,

[1] En el ensayo de Samuel Eilenberg y Saunders MacLane, 'General theory of natural equivalences', *Transactions of the American Mathematical Society* **58** (1945), 231-294, se introduce el término *categoría* por primera vez.

iv) $\circ$ es una ley de composición de morfismos:

$$\begin{aligned} \circ\colon\ \operatorname{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A,B)\times\operatorname{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(B,C) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A,C) \\ (f,g) &\longmapsto g\circ f, \end{aligned} \tag{A.1}$$

asociativa y tal que $\forall\, A,B\in\operatorname{Obj}(\underline{\mathcal{C}})$, $\forall\, f\in\operatorname{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A,B)$, $f\circ\operatorname{Id}_A=f=\operatorname{Id}_B\circ f$.

Ejemplo A.0.1. Algunos ejemplos conocidos de categorías son:

i) La colección de todos los conjuntos, que forma la categoría **Set** con las aplicaciones entre conjuntos como morfismos.

ii) La colección de todos los grupos y los homomorfismos de grupos forma la categoría **Gr**, con la composición e identidad usuales.

iii) La categoría **Top** de los espacios topológicos y las aplicaciones continuas.

iv) El conjunto de los grafos forma también una categoría, donde los objetos son los nodos y las flechas orientadas los morfismos. Las flechas que entran y salen a un mismo nodo son los morfismos identidad y para los nodos no conectados el conjunto de morfismos es vacío.

De aquí en adelante nos interesaremos por las categorías de espacios topológicos y álgebras con las que venimos trabajando, a saber

- La categoría **Cpt** de los espacios topológicos compactos y T_2 con las aplicaciones continuas entre ellos.
- La categoría **LCpt** de los espacios topológicos localmente compactos y T_2, donde los morfismos son las aplicaciones continuas y propias (una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos es *propia* si la antiimagen de todo compacto en Y es compacto en X).
- La categoría **C*alg** (**C*alg$_1$**) de las C^* álgebras (unitales) con los $*$-homomorfismos (unitales) entre ellas.
- La categoría **C*com** (**C*com$_1$**) de las C^* álgebras conmutativas (y unitales) y los $*$-homomorfismos (unitales) entre ellas.

Definición A.0.2. Si $\underline{\mathcal{C}}$ es una categoría y $A, B \in \underline{\mathcal{C}}$, un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A, B)$ se llama *isomorfismo* si existe un morfismo $g \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(B, A)$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ y $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.

Definición A.0.3. Sean $\underline{\mathcal{C}}$ y $\underline{\mathcal{D}}$ dos categorías. Un *funtor* (covariante) entre $\underline{\mathcal{C}}$ y $\underline{\mathcal{D}}$ es una aplicación $F : \underline{\mathcal{C}} \longrightarrow \underline{\mathcal{D}}$ que asigna a cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(\underline{\mathcal{C}})$ un objeto $F(A) \in \mathrm{Obj}(\underline{\mathcal{D}})$, y a cada morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A, B)$ un morfismo $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{D}}}(F(A), F(B))$, de manera que las leyes de composición y las identidades se conservan bajo la transformación:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \qquad \text{y} \qquad F(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{F(A)}. \tag{A.2}$$

Si F respeta las identidades, pero *revierte* el orden de composición:

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g), \tag{A.3}$$

entonces F se denomina *funtor contravariante* o *cofuntor*.

Ejemplo A.0.2. Veamos algunos ejemplos de funtores entre categorías:

i) Toda categoría $\underline{\mathcal{C}}$ tiene un *funtor identidad* $\mathrm{Id}_{\underline{\mathcal{C}}} : \underline{\mathcal{C}} \longrightarrow \underline{\mathcal{C}}$ que deja todo invariante: $\mathrm{Id}_{\underline{\mathcal{C}}}(A) = A$ para todo $A \in \mathrm{Obj}(\underline{\mathcal{C}})$ y $\mathrm{Id}_{\underline{\mathcal{C}}}(f) = f$ para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A, B)$. Este funtor hace de morfismo identidad en la categoría que forma el conjunto de todas las categorías, con los funtores entre ellas como morfismos.

ii) El funtor inclusión $F : \mathbf{Cpt} \longrightarrow \mathbf{Top}$, $G : \mathbf{LCpt} \longrightarrow \mathbf{Top}$, o $H : \mathbf{Cpt} \longrightarrow \mathbf{LCpt}$.

iii) La compactificación de Alexandroff (ver sección 1.2.4) define un funtor $F : \mathbf{LCpt} \longrightarrow \mathbf{Cpt}$.

iv) La adjunción de unidad a una C^* álgebra (1.3) define también un funtor $F : \mathbf{C^*alg} \longrightarrow \mathbf{C^*alg_1}$.

Proposición A.0.1. Las dos correspondencias:

$$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathbf{Cpt} & \longrightarrow & \mathbf{C^*com_1} \\ & X & \longmapsto & C(X) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} G\colon & \mathbf{C^*com_1} & \longrightarrow & \mathbf{Cpt} \\ & \mathcal{A} & \longmapsto & \Delta(\mathcal{A}), \end{array} \tag{A.4}$$

donde los morfismos se transforman de acuerdo a la proposición 1.2.3, son funtores contravariantes.

Demostración. De acuerdo a la proposición 1.2.3, si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos compactos y T_2, queda inducido un morfismo $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C^*com_1}}(C(Y), C(X))$, dado por $F(f)(g) = g \circ f$ para todo $g \in C(Y)$. Recíprocamente, si $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un $*$-homomorfismo entre C^* álgebras, queda inducido un morfismo $G(\varphi) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cpt}}(\Delta(\mathcal{B}), \Delta(\mathcal{A}))$, dado por $G(\varphi)(\omega) = \omega \circ \varphi$ para todo $\omega \in \Delta(\mathcal{B})$. Basta por tanto comprobar que ambas correspondencias conservan las identidades y revierten el orden de composición.

En primer lugar, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Cpt})$ y para todo $g \in C(X)$, $F(\mathrm{Id}_X)(g) = g \circ \mathrm{Id}_X = g$, luego $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{C(X)}$. Análogamente, para todo $\mathcal{A} \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C^*com_1})$ y para todo $\omega \in \Delta(\mathcal{A})$, $G(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}})(\omega) = \omega \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} = \omega$, luego $G(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}) = \mathrm{Id}_{\Delta(\mathcal{A})}$.

Sean ahora $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Cpt})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cpt}}(X, Y)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cpt}}(Y, Z)$. $\forall\, h \in C(Z)$:

$$F(g \circ f)(h) = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = F(f)(h \circ g) = F(f)(F(g)(h)) = (F(f) \circ F(g))(h),$$

luego F revierte el orden de composición. Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C^*com_1})$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C^*com_1}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C^*com_1}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, para todo $\omega \in \Delta(\mathcal{C})$:

$$G(\psi \circ \varphi)(\omega) = \omega \circ (\psi \circ \varphi) = (\omega \circ \psi) \circ \varphi = G(\varphi)(\omega \circ \psi) = G(\varphi)(G(\psi)(\omega)) = (G(\varphi) \circ G(\psi))(\omega),$$

luego G revierte también el orden de composición, siendo así F y G funtores contravariantes. $\square$

Como la composición de funtores contravariantes es un funtor contravariante, la proposición A.0.1 muestra que existen dos funtores contravariantes de una categoría en sí misma, $GF : \mathbf{Cpt} \longrightarrow \mathbf{Cpt}$ y $GF : \mathbf{C^*com_1} \longrightarrow \mathbf{C^*com_1}$. Pero FG y GF son distintos de los funtores identidad, es decir, las categorías $\mathbf{Cpt}$ y $\mathbf{C^*alg_1}$ no son isomorfas. El concepto apropiado es bastante más sutil y es que, como habíamos adelantado, estamos hablando de categorías *equivalentes*.

Definición A.0.4. Sean $\underline{\mathcal{C}}$ y $\underline{\mathcal{D}}$ dos categorías y $F, G : \underline{\mathcal{C}} \longrightarrow \underline{\mathcal{D}}$ dos funtores entre ellas. Una *transformación natural* entre F y G es una aplicación

$$\begin{array}{rccl} \tau\colon & \mathrm{Obj}(\underline{\mathcal{C}}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\underline{\mathcal{D}}) \\ & A & \longmapsto & \tau(A) \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{D}}}(F(A), G(A)), \end{array} \tag{A.5}$$

tal que, para todo $A, B \in \mathrm{Obj}(\underline{\mathcal{C}})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A, B)$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau(A)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\tau(B)"] & G(B). \end{tikzcd} \tag{A.6}$$

La aplicación:

$$\begin{array}{rccl} 1_F\colon & \mathrm{Obj}(\underline{\mathcal{C}}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\underline{\mathcal{C}}) \\ & A & \longmapsto & 1_F(A) = \mathrm{Id}_{F(A)}, \end{array} \tag{A.7}$$

es la *transformación identidad* entre F y F, que hace de morfismo identidad en la categoría que tiene por objetos a los funtores entre categorías, y por morfismos a las transformaciones naturales.

Definición A.0.5. En las condiciones de la definición anterior, se dice que los funtores F y G son *naturalmente isomorfos* si existe una transformación natural σ entre G y F tal que $\sigma \circ \tau = 1_F$ y $\tau \circ \sigma = 1_G$.

Definición A.0.6. Se dice que dos categorías $\underline{\mathcal{C}}$ y $\underline{\mathcal{D}}$ son *equivalentes* si existen funtores $F : \underline{\mathcal{C}} \longrightarrow \underline{\mathcal{D}}$ y $G : \underline{\mathcal{D}} \longrightarrow \underline{\mathcal{C}}$ tales que $F \circ G$ es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Id}_{\underline{\mathcal{D}}}$ y GF es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Id}_{\underline{\mathcal{C}}}$.

El objetivo ahora es comprobar que existe una equivalencia entre las categorías de los espacios topológicos compactos y T_2 y de las C^* álgebras conmutativas y con unidad. Volvamos para ello a los funtores de la proposición A.0.1 y veamos que $F \circ G$ es naturalmente isomorfo al funtor $1_{\mathbf{C^*com_1}}$ y que $G \circ F$ es naturalmente isomorfo al funtor $1_{\mathbf{Cpt}}$. De acuerdo a cómo hemos construido F y G, ambas composiciones son funtores contravariantes que actúan como:

$$\begin{aligned} F\circ G\colon\ \mathbf{C^*com_1} &\longrightarrow \mathbf{C^*com_1} \\ \mathcal{A} &\longmapsto C(\Delta(\mathcal{A})), \end{aligned} \tag{A.8}$$

donde, para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C^*com_1}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $(F\circ G)(\varphi) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C^*com_1}}(C(\Delta(\mathcal{A})), C(\Delta(\mathcal{B})))$ está dado por $(F\circ G)(\varphi)(g) = g\circ G(\varphi)$ para todo $g \in C(\Delta(\mathcal{A}))$, y:

$$\begin{aligned} G\circ F\colon\ \mathbf{Cpt} &\longrightarrow \mathbf{Cpt} \\ X &\longmapsto \Delta(C(X)), \end{aligned} \tag{A.9}$$

donde, para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cpt}}(X,Y)$, $(G\circ F)(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cpt}}(\Delta(C(X)), \Delta(C(Y)))$ está dado por $(G\circ F)(f)(\omega) = \omega\circ F(f)$ para todo $\omega \in \Delta(C(X))$.

Consideramos ahora la aplicación:

$$\begin{aligned} \tau\colon\ \mathrm{Obj}(\mathbf{C^*com_1}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C^*com_1}}(A, C(\Delta(A))) \\ \mathcal{A} &\longmapsto \varphi_{\mathcal{A}}, \end{aligned} \tag{A.10}$$

donde $\varphi_{\mathcal{A}}$ es la Transformada de Gelfand 1.44. Veamos que A.10 es efectivamente una transformación natural entre $1_{\mathbf{C^*com_1}}$ y $F\circ G$, es decir, que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "\varphi"'] & C(\Delta(\mathcal{A})) \arrow[d, "(F\circ G)(\varphi)"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & C(\Delta(\mathcal{B})) \end{tikzcd} \tag{A.11}$$

para todo $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C^*com_1})$ y todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C^*com_1}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. En efecto, si $a \in \mathcal{A}$:

$$(\varphi_{\mathcal{B}}\circ\varphi)(a) = \varphi_{\mathcal{B}}(\varphi(a)) = \hat{\varphi(a)}, \tag{A.12}$$

donde $\hat{\varphi(a)}(\omega) = \omega(\varphi(a))$ para todo $\omega \in \Delta(\mathcal{B})$. Por otro lado,

$$((F \circ G)(\varphi) \circ \varphi_{\mathcal{A}})(a) = (F \circ G)(\varphi)(\hat{a}) = \hat{a} \circ G(\varphi), \tag{A.13}$$

donde, para todo $\omega \in \Delta(\mathcal{B})$:

$$(\hat{a} \circ G(\varphi))(\omega) = \hat{a}(G(\varphi)(\omega)) = \hat{a}(\omega \circ \varphi) = (\omega \circ \varphi)(a) = \omega(\varphi(a)), \tag{A.14}$$

luego el diagrama es conmutativo y por tanto τ es una transformación natural entre $1_{\mathbf{C^{*}com_1}}$ y $F \circ G$. Como la Transformada de Gelfand es un $*$-isomorfismo, es inmediato que podemos construir la transformación inversa a τ de manera que el diagrama inverso a A.11 sea también conmutativo. La condición de $*$-isomorfismo que nos da el Teorema de Gelfand Naimark induce así la construcción de un isomorfismo natural entre los funtores $F \circ G$ y la identidad $1_{\mathbf{C^{*}com_1}}$.

Comprobar que $G \circ F$ que naturalmente isomorfo a la $1_{\mathbf{Cpt}}$ es análogo al desarrollo anterior, considerando la transformación:

$$\begin{array}{rccl} \sigma\colon & \mathrm{Obj}(\mathbf{Cpt}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cpt}}(X, \Delta(C(X))) \\ & X & \longmapsto & \sigma(X), \end{array} \tag{A.15}$$

donde $\sigma(X)$ denota la biyección conocida entre los puntos del espacio topológico y los caracteres del álgebra asociada:

$$\begin{array}{rccl} \sigma(X)(x) = \omega_x\colon & C(X) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & f & \longmapsto & f(x), \end{array} \tag{A.16}$$

que es además un homeomorfismo de X en $\Delta(C(X))$. Veamos que, para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Cpt})$ y todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cpt}}(X, Y)$, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma(X)"] \arrow[d, "f"'] & \Delta(C(X)) \arrow[d, "(G \circ F)(f)"] \\ Y \arrow[r, "\sigma(Y)"] & \Delta(C(Y)) \end{tikzcd} \tag{A.17}$$

En efecto, si $x \in X$,

$$(\sigma(Y) \circ f)(x) = \sigma(Y)(f(x)) = \omega_{f(x)}, \tag{A.18}$$

donde, para todo $g \in C(Y)$, $\omega_{f(x)}(g) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Por otro lado,

$$((G \circ F)(f) \circ \sigma(X))(x) = (G \circ F)(f)(\omega_x) = \omega_x \circ F(f), \tag{A.19}$$

donde, para todo $g \in C(Y)$, $(\omega_x \circ F(f))(g) = \omega_x(F(f)(g)) = \omega_x(g \circ f) = (g \circ f)(x)$, lo que prueba la conmutatividad del diagrama. Tenemos así una transformación natural de $1_{\mathbf{Cpt}}$ en $G \circ F$ y, como $\sigma(X)$ es un homeomorfismo, podemos construir la transformada natural inversa y concluir así que $G \circ F$ es naturalmente isomorfo a $1_{\mathbf{Cpt}}$, habiendo llegado finalmente a que las categorías **Cpt** y $\mathbf{C^*com_1}$ son *equivalentes*.

La equivalencia de categorías eleva la visión que proporciona el Teorema de Gelfand-Naimark a un punto de vista más global, desde el que cada concepto, construcción o resultado válido en espacios topológicos compactos y T_2 que pueda expresarse en lenguaje de categorías tiene su traducción inmediata en términos de C^* álgebras conmutativas y unitales. Así, la topología de un espacio X puede expresarse completamente en términos de la estructura algebraica de su álgebra asociada, y viceversa. Como ya habíamos introducido, es aquí donde entra en juego la *topología no conmutativa*, que toma las equivalencias construidas hasta ahora, generaliza la categoría de álgebras a $\mathbf{C^*alg_1}$ y recoge su traducción topológica que devuelve el diccionario anterior.

Bibliografía

[1] Aguilar Benítez, R. *Álgebras C^* y grupos cuánticos compactos.* Universidad Nacional Autónoma de Mexico (2006).

[2] Cohen-Tannoudji, C., Bernard, D., Laloë, F. *Mécanique quantique I.* Hermann, Paris (1995).

[3] Dell'Ambrogio, I. *Categories of C^*-algebras.*

[4] Bishop, R.L., Goldberg, S.L. *Tensor Analysis on Manifolds.* Dover Publications , Inc. New York (1980).

[5] Drago, A. *Is the C^*-Algebraic Approach to Quantum Mechanics an Alternative Formulation to the Dominant One?.* Advances in Historical Studies, 7, 58-78 (2018).

[6] Eidelheit, M. *On isomorphisms of rings of linear operators.* Studia Math (1940).

[7] Gleason, J. J. *The C^*-algebraic formalism of Quantum Mechanics.*

[8] Kalamakis, G. *Algebraic Formulation of Quantum Theory.* Seminar on Mathematical Aspects of Theoretical Physics (2012).

[9] Landsman, L. P., *Lecture Notes on C^*-Algebras, Hilbert C^*-modules, and Quantum Mechanics.* Korteweg-de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam (1998).

[10] Macho Stadler, M. *Algunas ideas sobre Geometría no conmutativa.* Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea.

[11] Moretti, V. *Fundamental Mathematical Structures of Quantum Theory.* University of Trento.

[12] Takhtajan, L. A. *Quantum Mechanics for Mathematicians.* American Mathematical Society (2008).

[13] Ugalde, W. J., Várilly, J. C. *Geometría no conmutativa.* Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica (2010).

[14] Zbigniew, S. *Spaces of Continous Functions on Compact Sets.* Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, Poznari Branch, Poland.