Réalisations de 1-motifs et invariants de classes

Jean Gillibert

XXIV$^{\mathrm{es}}$ Journées Arithmétiques

4 juillet 2005

1-motifs (d'après P. Deligne)

Fixons un schéma nœthérien S

Définition : Un S-1-motif est un complexe $[u : Y \to V]$ de S-schémas en groupes commutatifs (avec Y en degré -1 et V en degré 0), tel que

(1) Y est localement isomorphe (pour la topologie étale sur S) à un S-schéma en groupes constant de la forme $\mathbb{Z}^r$.

(2) V est extension d'un S-schéma abélien A par un S-tore T.

On appelle Y le cran étale, A le cran abélien, et T le cran torique, du motif considéré.

Réalisations de 1-motifs

Fixons un entier $n > 0$

Soit $M = [u : Y \to V]$ un S-1-motif. On note $T_n(M)$ le conoyau de l'homomorphisme

$$([n]_Y, u) : Y \longrightarrow Y \times_V V$$

où le produit fibré est pris relativement aux flèches $u : Y \to V$ et $[n]_V : V \to V$. Alors $T_n(M)$ est un S-schéma en groupes fini et plat, et s'insère dans une suite exacte (notée $\xi(n,u)$)

$$0 \longrightarrow V[n] \longrightarrow T_n(M) \longrightarrow Y/nY \longrightarrow 0$$

Définition : On appelle $T_n(M)$ la *réalisation plate* de M à coefficients dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Structure galoisienne des torseurs

G un S-schéma en groupes commutatif, fini et plat
G^D le dual de Cartier de G

(W. Waterhouse, 1971). On dispose d'un homomorphisme

$$\pi : H^1(S, G) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^1(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \longrightarrow \operatorname{Pic}(G^D)\,.$$

La première flèche est un isomorphisme déduit de la suite locale-globale pour les Ext^n.
La deuxième flèche est l'application naturelle.

On dit que π mesure la structure galoisienne des G-torseurs.

L'invariant de classes (M. J. Taylor)

Soit la suite exacte de Kummer

$$0 \longrightarrow V[n] \longrightarrow V \xrightarrow{[n]_V} V \longrightarrow 0$$

On note $\delta_n : V(S) \to H^1(S, V[n])$ le cobord de cette suite exacte.

Définition : L'invariant de classes est l'homomorphisme ψ_n obtenu par composition des applications suivantes :

$$\psi_n : V(S) \xrightarrow{\delta_n} H^1(S, V[n]) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}(V[n]^D)$$

Ainsi ψ_n permet de mesurer la structure galoisienne d'une certaine famille de $V[n]$-torseurs.

Lien entre les deux constructions ?

Soit $M = [u : \mathbb{Z} \to V]$ un S-1-motif dont le cran étale est $\mathbb{Z}$.

La donnée de M équivaut à la donnée de V et de $u(1) \in V(S)$.

Idée : La valeur de l'homomorphisme ψ_n sur le point $u(1) \in V(S)$ doit être déterminée par la réalisation $T_n(M)$.

Objectif : Etablir un lien entre le torseur $\delta_n(u(1))$ et l'extension $\xi(n, u)$ définissant $T_n(M)$.

Confrontation des protagonistes

(1) L'extension $\xi(n, u)$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $V[n]$ définissant $T_n(M)$

$$0 \longrightarrow V[n] \longrightarrow T_n(M) \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(2) Le torseur $\delta_n(u(1))$, auquel correspond (cf. Waterhouse) une extension Θ de $V[n]^D$ par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow \Theta \longrightarrow V[n]^D \longrightarrow 0$$

Comment comparer ces deux extensions ?

Soit $\xi(n,u)^D$ la suite déduite de $\xi(n,u)$ par dualité de Cartier

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow T_n(M)^D \longrightarrow V[n]^D \longrightarrow 0$$

Alors le push-out de cette suite par l'inclusion $\mu_n \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow T_n(M)^D \sqcup_{\mu_n} \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow V[n]^D \longrightarrow 0$$

est isomorphe à l'extension $\boldsymbol{\Theta}$.

Interprétation du résultat

Résumons la situation par un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \xi(n,u)^D \in \mathrm{Ext}^1(V[n]^D, \mu_n) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(V[n]^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) & & \ni \Theta \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H^1(V[n]^D, \mu_n) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(V[n]^D) & & \ni \psi_n(u(1)) \end{array}$$

D'autre part, pour tout schéma X, nous avons une suite exacte

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times \longrightarrow H^1(X, \mu_n) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

Corollaire : $\psi_n(u(1)) = 0$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \Gamma(V[n]^D, \mathcal{O}_{V[n]^D})^\times$ tel que $T_n(M)^D$ soit isomorphe, en tant que $V[n]^D$-schéma, à $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{V[n]^D}[Y]/(Y^n - \alpha))$.

Comportement de ψ_n sur les points de torsion

Théorème (Srivastav, Taylor, Agboola, Pappas) : Supposons que V soit une S-courbe elliptique, et que n soit premier à 6. Alors $V(S)_{\mathrm{Tors}} \subseteq \ker \psi_n$.

Corollaire : Supposons que V soit isogène à un produit de S-courbes elliptiques, par le biais d'une isogénie de degré N, et que n soit premier à $6N$. Alors $V(S)_{\mathrm{Tors}} \subseteq \ker \psi_n$.

Théorème (Pappas) : Soient deux nombres premiers $r \neq \ell$. Il existe une courbe affine lisse C sur un corps fini de caractéristique r, et un C-schéma abélien de dimension relative 2, possédant un point de torsion d'ordre ℓ sur lequel ψ_ℓ ne s'annule pas.

Autres résultats (bilan provisoire)

(1) Supposons que V soit une puissance du groupe multiplicatif. Alors $V(S) \subseteq \ker \psi_n$.

(2) Supposons que V soit un S-tore, et que S soit connexe normal. Alors il existe un revêtement étale de degré N sur lequel V se trivialise et, pour tout n premier à N, $V(S) \subseteq \ker \psi_n$.

(3) Supposons que V soit extension d'une S-courbe elliptique E par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. Soit $p : V \to E$ la projection naturelle. On suppose que $V[n]^D$ a autant de S-points que son ordre, et que n est premier à $|\operatorname{Pic}(S)|$. Alors $p^{-1}(E(S)_{\mathrm{Tors}}) \subseteq \ker \psi_n$.