MSI 101, Groupe A2 Le 15 décembre 2009

Test n° 3

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } \; t < 0 \\ \cos(t) - 1 & \text{si } \; t \geq 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est continue en 0.
2. Montrer que f est dérivable en 0. Quelle est la valeur de $f'(0)$?

Exercice 2. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 e^x \cos(e^x)\, dx$$

(on pourra effectuer le changement de variable $t = e^x$).

Corrigé 1. 1. Nous avons

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} e^{1/t} = 0 = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} (\cos(t) - 1) = f(0)$$

ce qui montre que f est continue en 0.

2. Nous avons

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \begin{cases} \frac{e^{1/t}}{t} & \text{si } t < 0 \\ \frac{\cos(t)-1}{t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On calcule alors les limites des deux expressions quand t tend vers 0.

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{e^{1/t}}{t} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\cos(t) - 1}{t} = \cos'(0) = 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Corrigé 2. On pose $t = e^x$, alors $x = \ln(t)$ et $dx = \frac{1}{t}\, dt$. Nous avons donc, par la formule de changement de variable

$$I = \int_0^1 e^x \cos(e^x)\, dx = \int_{e^0}^{e^1} t \cos(t) \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int_1^e \cos(t)\, dt = [\sin(t)]_1^e = \sin e - \sin 1$$