MSI 101, Groupe D5 — Le 21 novembre 2008

Test n° 3

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } \ t < 0 \\ 0 & \text{si } \ t \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en 0.
2. Étudier l'existence de $f''(0)$.

Exercice 2. Déterminer le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction

$$g(x) = \sqrt{1 + (x \sin x)^2}.$$

Corrigé 1.

1. On a

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \begin{cases} e^{1/t}/t & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

or $e^{1/t}/t$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs négatives. Donc f est dérivable à gauche et à droite en 0 et ces dérivées sont identiques, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2. On a

$$f'(t) = \begin{cases} -e^{1/t}/t^2 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

donc le taux d'accroissement de f' au voisinage de 0 est

$$\frac{f'(t) - f'(0)}{t} = \begin{cases} -e^{1/t}/t^3 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

et il tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc f admet une dérivée seconde en 0, et $f''(0) = 0$.

Corrigé 2. La fonction $x \mapsto 1 + (x \sin x)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[1, +\infty[$, et la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$. On en déduit que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Un bref calcul montre que

$$g'(x) = \frac{x \sin^2 x + x^2 \sin x \cos x}{\sqrt{1 + (x \sin x)^2}}.$$