MSI 101, Groupe A2 Le 10 novembre 2009

Test n° 2

Exercice 1. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \cos(n) \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

est-elle convergente ? Le cas échéant, déterminer sa limite.

Exercice 2. Les limites suivantes existent-elles ? Si oui, les déterminer.

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, \qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2+|x|}{x}.$$

Corrigé 1. La suite $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge vers 0. La fonction sin étant continue en 0, on en déduit que la suite $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge vers $\sin(0) = 0$. D'autre part, la suite $\cos(n)$ est bornée. Sachant que le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 tend vers 0, on en déduit que (u_n) converge vers 0.

Corrigé 2. (*a*) On calcule

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\end{aligned}$$

et l'expression obtenue tend vers 1 quand x tend vers 0.

(*b*) Nous avons, pour $x \neq 0$,

$$\frac{x^2+|x|}{x} = x + \frac{|x|}{x} = x + \mathrm{signe}(x)$$

où signe(x) vaut 1 quand x est positif ou nul, et -1 quand x est strictement négatif. La limite à droite en 0 de l'expression obtenue vaut 1, et la limite à gauche vaut -1, donc l'expression de départ n'admet pas de limite en 0.