MSI 101, Groupe D5 Le 31 octobre 2008

Test n° 2

Exercice 1. Étudier la convergence (et, le cas échéant, calculer la limite) des suites

$$u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$$
$$v_n = \frac{n\sin(n)}{n^2+1}$$
$$w_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

Exercice 2. Peut-on trouver une suite divergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ?

Corrigé 1.

1. Il vient aussitôt
$$u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1+\frac{1}{n}} - 1\right)$$
La suite de terme général $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$, de même que la suite de terme général $\sqrt{n+1+\frac{1}{n}} - 1$. On en déduit que (u_n) tend vers $+\infty$, donc est divergente.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sin(n)|$ est majoré par 1. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq |v_n| \leq \frac{n}{n^2+1}$$
Or la suite de terme général $\frac{n}{n^2+1}$ converge vers 0. D'après le théorème des gendarmes, (v_n) converge donc vers 0.
3. La suite extraite (w_{2n}) converge vers 1 et la suite extraite (w_{2n+1}) converge vers -1. On en déduit que (w_n) diverge.

Corrigé 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
Alors $(u_{n+1}-u_n)$ tend vers 0, et pourtant (u_n) diverge comme on l'a vu en cours.