MSI 101, Groupe A1 Le 22 septembre 2010

Test n° 1

Exercice 1. Soit $f : E \to F$ une application. Soient A et B deux parties de E.

1. Montrer que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
2. On suppose que f est injective. Montrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. Donner un exemple pour lequel $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Exercice 2. Soit $g : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Montrer que g est injective.

Exercice 3. Soient X et Y deux ensembles finis. Déterminer, en fonction de $\mathrm{Card}(X)$ et de $\mathrm{Card}(Y)$, le cardinal de l'ensemble $\mathfrak{P}(X \times Y)$ des parties de $X \times Y$. Faire de même avec l'ensemble $\mathfrak{P}(X)^Y$. Que remarque-t-on ?

Corrigé 1.

1. Soit $y \in f(A \cap B)$, alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$. Comme x appartient à A, on peut dire que y appartient à $f(A)$. De même, y appartient à $f(B)$. Au final, y appartient à $f(A) \cap f(B)$, ce qu'on voulait.
2. Supposons f injective. Soit y appartenant à $f(A) \cap f(B)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$ et il existe $x' \in B$ tel que $f(x') = y$. Comme f est injective, on en déduit que $x = x'$. Mais alors, x appartient à $A \cap B$, et par conséquent y appartient à $f(A \cap B)$. Ceci montre que $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$, et d'après la question précédente l'autre inclusion est vraie, donc ces ensembles sont égaux.
3. Soit $f : \{1, 2\} \to \{3\}$ l'unique application. Soit $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$. Alors $A \cap B = \emptyset$ mais $f(A) \cap f(B) = \{3\} \neq \emptyset$.

Corrigé 2. Soient x et y deux réels tels que $g(x) = g(y)$. Alors

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{y+1}{y-1}$$

donc

$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$$

d'où

$$xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$$

et après simplification $2y = 2x$. Ainsi $x = y$, ce qui montre que g est injective.

Corrigé 3. D'après le cours, nous avons :

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{P}(X \times Y)) = 2^{\mathrm{Card}(X \times Y)} = 2^{\mathrm{Card}(X)\,\mathrm{Card}(Y)}$$

De même

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{P}(X)^Y) = \mathrm{Card}(\mathfrak{P}(X))^{\mathrm{Card}(Y)} = (2^{\mathrm{Card}(X)})^{\mathrm{Card}(Y)} = 2^{\mathrm{Card}(X)\,\mathrm{Card}(Y)}$$

Ces deux nombres sont égaux, donc les ensembles $\mathfrak{P}(X \times Y)$ et $\mathfrak{P}(X)^Y$ sont en bijection.