MSI 101, Groupe A2 Le 29 septembre 2009

Test n° 1

Exercice 1. Soient X et Y deux ensembles. L'égalité suivante

$$\mathfrak{P}(X \cup Y) = \mathfrak{P}(X) \cup \mathfrak{P}(Y)$$

est-elle vraie ?

Exercice 2. Soient X et Y deux ensembles finis. Déterminer, en fonction de Card(X) et de Card(Y), le cardinal de l'ensemble $\mathfrak{P}(Y^X)$ des parties de Y^X.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)}$.

1. L'application f est-elle injective ?
2. L'application f est-elle surjective ?
3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Corrigé 1. Cette égalité est fausse. Par exemple, si $X = \{1, 2\}$ et $Y = \{3, 4\}$ alors $\{1, 3\}$ est une partie de $X \cup Y$ mais n'est pas une partie de X, ni une partie de Y.

Corrigé 2. D'après le cours, nous avons :

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{P}(Y^X)) = 2^{\mathrm{Card}(Y^X)} = 2^{\mathrm{Card}(Y)^{\mathrm{Card}(X)}}.$$

Corrigé 3.

1. L'application f n'est pas injective car $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$.
2. L'application f n'est pas surjective car 2 n'admet pas d'antécédent par f : en effet l'équation $f(x) = 2$ se réécrit $2x = 2(1 + x^2)$, soit $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solution réelle.
3. Fixons $y \in \mathbb{R}$. Alors l'équation $f(x) = y$ se réécrit $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation polynomiale en x admet (au moins) une solution si et seulement si son discriminant $\Delta = 4 - 4y^2$ est positif ou nul, c'est-à-dire si et seulement si $y \in [-1, 1]$. Ceci montre que $f(\mathbb{R})$ est égal à $[-1, 1]$.