# Fonctions usuelles

Erwan Le Yaouanc
eleyaouanc@yahoo.fr

version 1.2$\varepsilon$
6 février 2009

## Table des matières

# 1 Fonctions trigonométriques

## 1.1 Définition

On suppose le plan réel rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)\right)$. Nous notons $A$ le point de coordonnées $(1;0)$ et considérons le cercle de centre $O$ et de rayon 1, que l'on appelle **cercle trigonométrique**. Nous pouvons associer à tout $t \in \mathbb{R}$, un unique point $M(t)$ appartenant au cercle de centre $O$ et de rayon 1 tel que la longueur orientée de l'arc $\widehat{AM(t)}$ soit le réel $t$. Lorsque l'on mesure les angles en radians, le point $M(t)$ est le point d'intersection de la demi-droite d'origine $O$ et d'angle $t$ par rapport à l'axe des abscisses avec le cercle trigonométrique. Nous notons[1] $H$ la projection orthogonale de $M(t)$ sur l'axe des abscisses et $K$ la projection du point $M(t)$ sur l'axe des ordonnées.

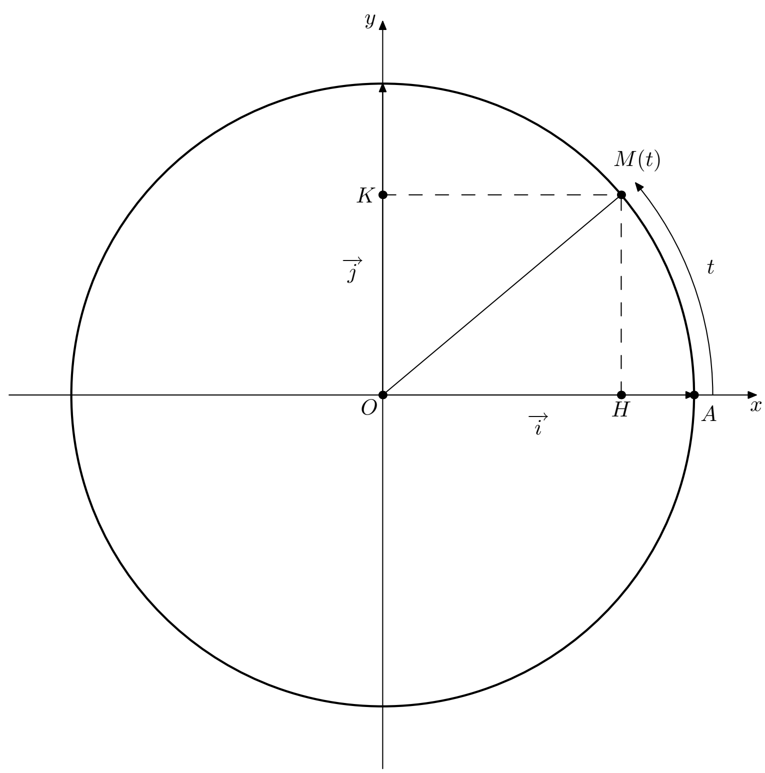


Fig. 1 – Le cercle trigonométrique

Nous définissons alors deux fonctions cos et sin, en posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\cos(t) := \overline{OH} \qquad \text{et} \qquad \sin(t) := \overline{OK}$$

où l'on a noté $\overline{OH}$ et $\overline{OK}$ les distances orientées[2] des segments $[OH]$ et $[OK]$. Les graphes des deux fonctions ainsi définies sont les suivants :

[1] Ces deux nouveaux points dépendent de $t$ mais nous ne le notons pas pour ne pas alourdir la notation

[2] Ici nous choisissons comme origine commune sur les droites des abscisses et des ordonnées le point $O$.

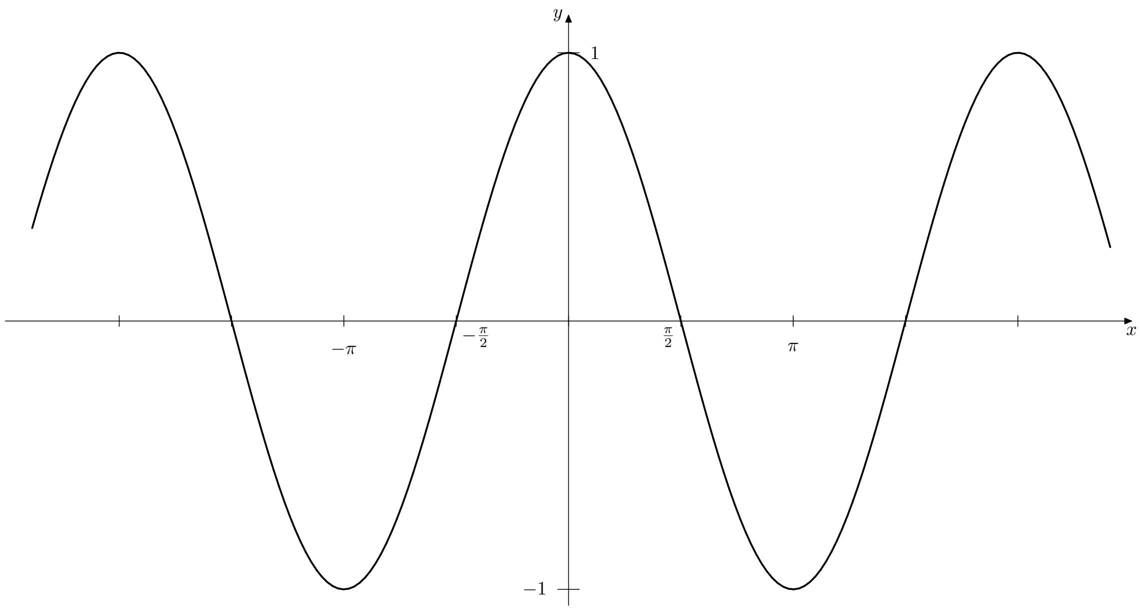


Fig. 2 – Le graphe de la fonction cos

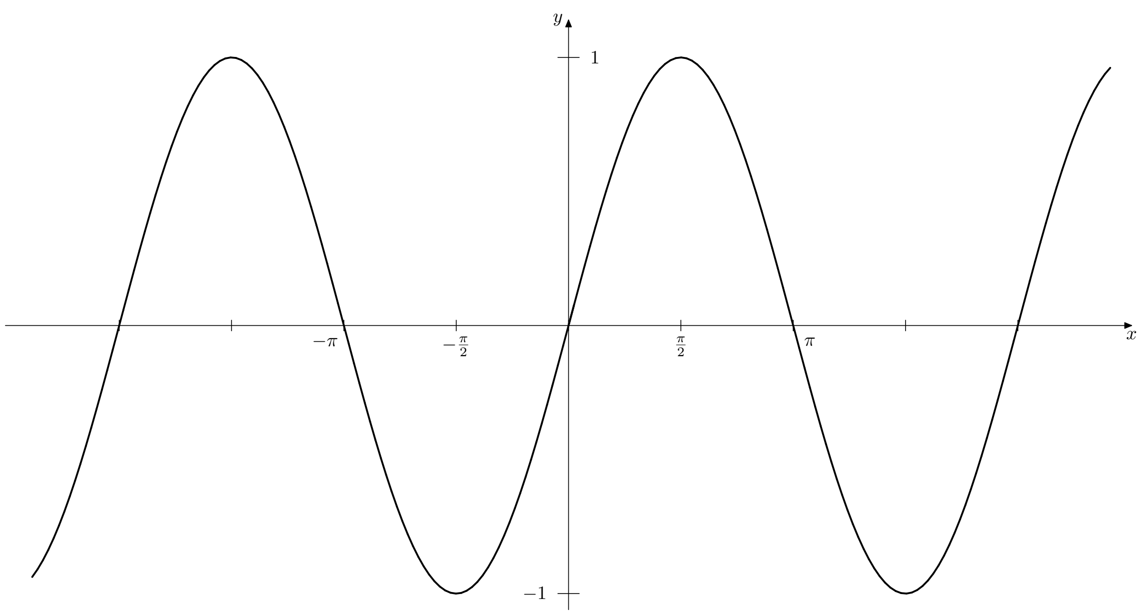


Fig. 3 – Le graphe de la fonction sin

Nous constatons en particulier que la fonction cos (resp. sin) est $2\pi$-périodique et paire (resp. impaire) et qu'elles prennent toutes les deux leurs valeurs entre $-1$ et $+1$.

## 1.2 Géométrie du triangle

Rappelons brièvement[3] l'utilisation des fonctions trigonométriques en géométrie du triangle. Nous supposons le plan rapporté à un repère orthonormé direct (afin de pouvoir parler de distance et d'angles). Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$.

[3] Le lecteur est supposé être familier de la géométrie du triangle.

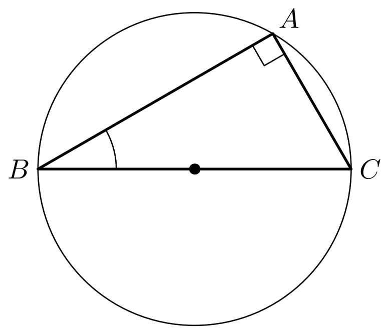


FIG. 4 – L'hypoténuse d'un triangle rectangle est un diamètre de son cercle circonscrit

Nous supposons que les points $A$, $B$ et $C$ sont distincts. Alors nous avons les formules :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\widehat{ABC}\right) &= \frac{AB}{BC} &&= \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \\
\sin\left(\widehat{ABC}\right) &= \frac{AC}{BC} &&= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \\
\tan\left(\widehat{ABC}\right) &= \frac{AC}{AB} &&= \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \\
&= \frac{\sin\left(\widehat{ABC}\right)}{\cos\left(\widehat{ABC}\right)}
\end{aligned}$$

Donnons maintenant un petit tableau de valeurs particulières des fonctions sin, cos et tan :

| $x$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $\tan(x)$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ | |

FIG. 5 – Valeurs particulières des fonctions trigonométriques

## 1.3 Formules trigonométriques

Par définition[4], nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\boxed{\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1}$$

Nous avons aussi, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(t) \qquad \text{et} \qquad \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(t)$$

Cela résulte du dessin suivant :

[4]Cela résulte du théorème de Pythagore.

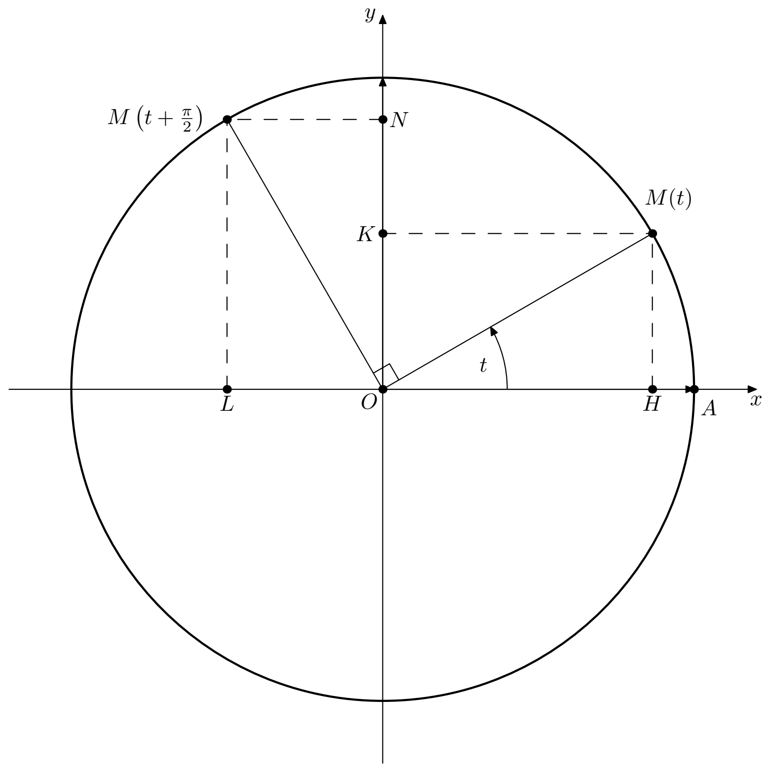


FIG. 6 – Idée géométrique de la preuve des formules $\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(t)$ et $\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(t)$

Le triangle $(ONM\left(t+\frac{\pi}{2}\right))$ est l'image par la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ du triangle $(OHM(t))$. Donc les longueurs (non orientées) $OH$ et $ON$ ainsi que $OK$ et $OL$ sont égales ; ce qui prouve nos égalités au signe près. Dans la situation du dessin, le signe est le bon et on peut toujours, par une rotation convenable se ramener à la situation du dessin.
On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t) \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$$

Nous avons aussi, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\cos(\pi - t) = -\cos(t) \qquad \text{et} \qquad \sin(\pi - t) = \sin(t)$$

ce qui résulte de deux applications successives des formules précédentes et de la parité des fonctions cos et sin.

### 1.3.1 Formules d'addition

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, nous avons les formules suivantes, dites « formules d'addition » :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

dont on déduit :

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\
\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)
\end{aligned}$$

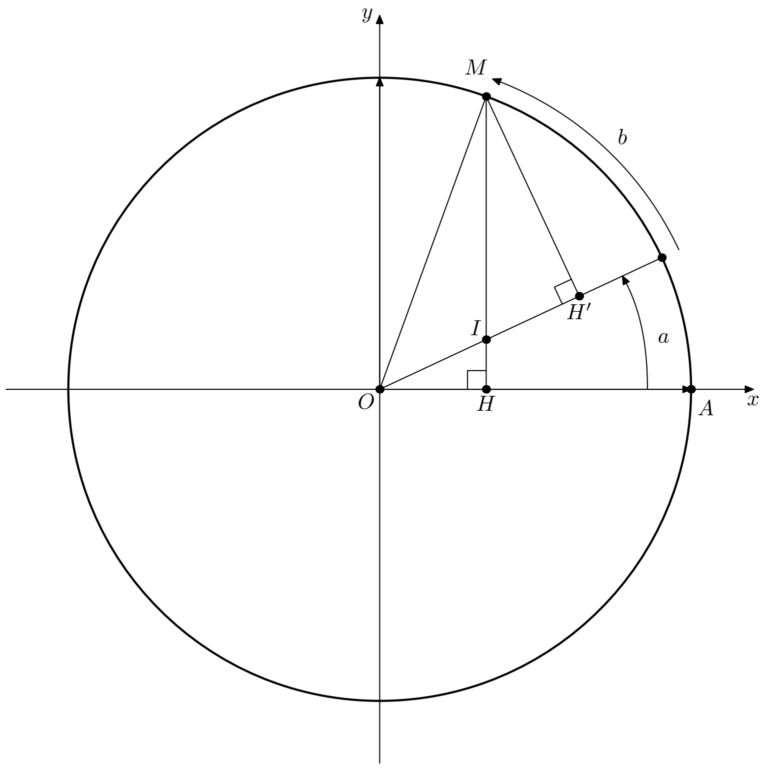


FIG. 7 – Idée géométrique de la preuve des formules d'addition

Dans la situation du dessin précédent, nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \cos(a)\cdot OI & = & OH \\ OI + IH' & = & OH' = \cos(b) \\ IH' & = & \cos\left(\widehat{H'IM}\right)\cdot IM = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)\cdot IM \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)\cdot IM & = & MH' = \sin(b) \end{array}$$

Ce qui permet d'écrire, lorsque $a \not\equiv 0 \bmod \pi$ :

$$\begin{array}{rcl} OH & = & \cos(a)\left(\cos(b) - IH'\right) \\ & = & \cos(a)\left(\cos(b) - \sin(a)\cdot\dfrac{\sin(b)}{\cos(a)}\right) \end{array}$$

Enfin, on peut toujours se ramener, par une rotation convenable, à la situation du dessin en utilisant les formules précédentes.
Nous avons alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{rcl} \cos(2t) & = & 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t) \\ \sin(2t) & = & 2\cos(t)\sin(t) \\ \cos^2(t) & = & \dfrac{1+\cos(2t)}{2} \\ \sin^2(t) & = & \dfrac{1-\cos(2t)}{2} \end{array}$$

### 1.3.2 Formules de transformation

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, nous avons les formules suivantes, dites « formules de transformation » :

$$\begin{array}{rcrlcl}
\cos(a)+\cos(b) & = & 2 & \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) & \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\cos(a)-\cos(b) & = & -2 & \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) & \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\sin(a)+\sin(b) & = & 2 & \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) & \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\sin(a)-\sin(b) & = & 2 & \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) & \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{array}$$

Ces formules se déduisent des formules d'addition.

### 1.3.3 Autres formules utiles

Nous avons, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{rcrcl}
\cos(3t) & = & 4\cos^3(t) & - & 3\cos(t) \\
\sin(3t) & = & -4\sin^3(t) & + & 3\sin(t)
\end{array}$$

ces formules découlant[5] des formules d'addition.

## 1.4 La fonction tan

Soit $t \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Notons $T$ le point d'intersection de la droite $(OM(t))$ avec la droite d'équation $x = 1$. Nous pouvons aussi définir la fonction tan en $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \neq \frac{\pi}{2} \bmod \pi$ par :

$$\tan(t) \quad := \quad \overline{AT}$$

la distance orientée[6] entre les points $A$ et $T$.

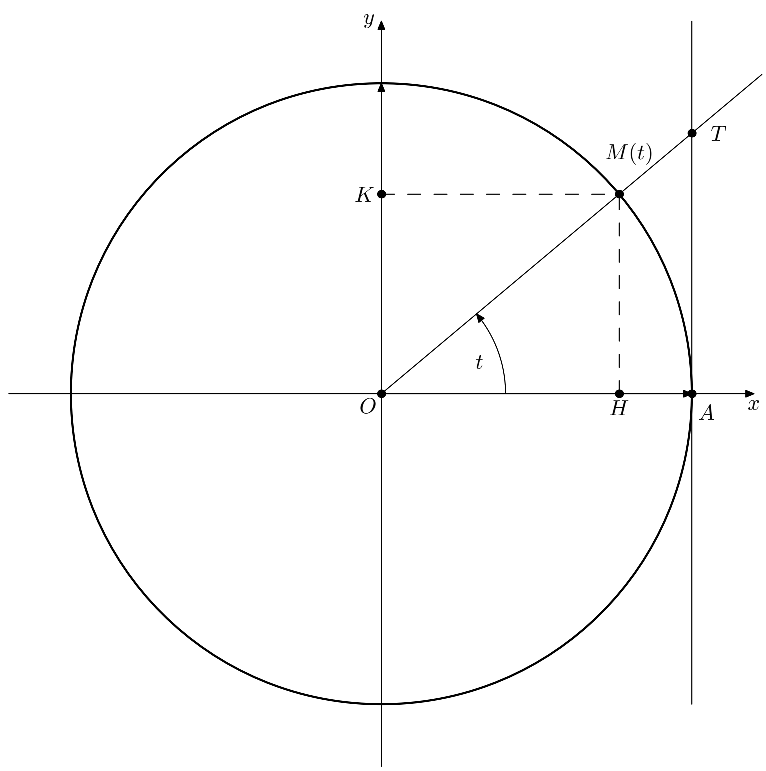


FIG. 8 – Définition géométrique de la fonction tan

[5]Elle découlent aussi d'une utilisation immédiate des formules d'Euler.
[6]Ici nous choisissons le point $A$ comme origine de la droite d'équation $x = 1$.

Nous remarquons alors, via le théorème de Thalès, que pour $t \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, nous avons :

$$\tan(t) \quad = \quad \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

ce qui nous permet de prolonger la fonction tan sur la réunion d'intervalles $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
Remarquons que la fonction tan ainsi définie est $\pi$-périodique. Sa courbe représentative est la suivante :

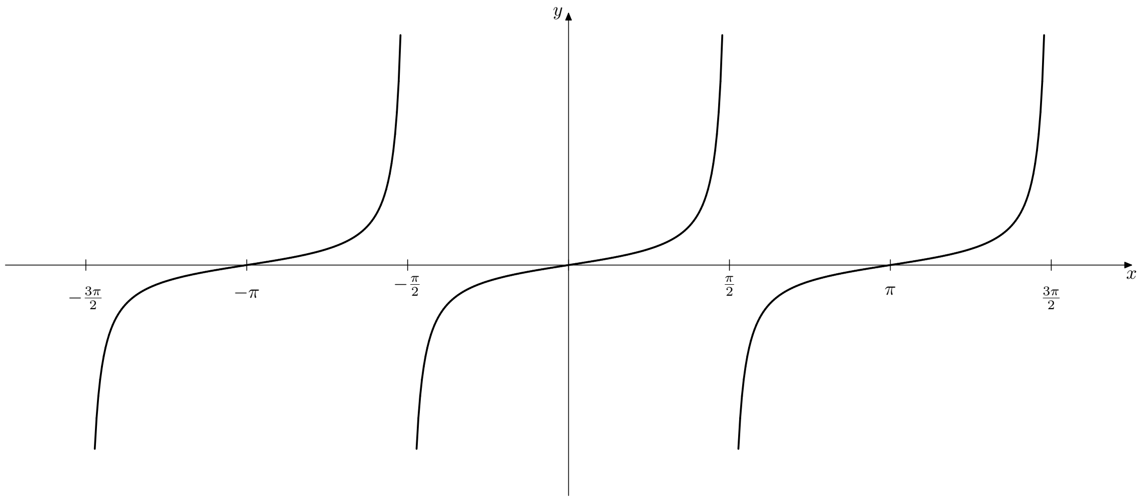


FIG. 9 – Courbe représentative de la fonction tan

### 1.4.1 Formules trigonométriques faisant intervenir la fonction tan

Nous avons immédiatement à partir des formules pour les fonctions cos et sin, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \bmod \frac{\pi}{2}$ :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \quad = \quad \frac{1}{\tan(t)}$$

Nous avons pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a + b \not\equiv 0 \bmod \frac{\pi}{2}$ :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

Ces formules s'obtiennent en utilisant les formules d'addition et en divisant par $\cos(a) \cdot \cos(b)$. En particulier, nous avons :

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

### 1.4.2 Changement de variable

Le changement de variable suivant est parfois utile au calcul d'intégrales. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \not\equiv 0 \bmod \frac{\pi}{2}$. Posons :

$$t \quad := \quad \tan\left(\frac{a}{2}\right)$$

Nous avons alors les formules suivantes :

$$\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad , \qquad \sin(a) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Cela résulte du fait que $1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}$, et que $1 - t^2 = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}$ et des formules d'additions.

**Exercices 1.1**

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \not\equiv -y \mod \pi$. Simplifier l'expression :

$$\frac{\sin(x)+\sin(y)}{\cos(x)-\cos(y)}$$

2. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a+b+c=\pi$. Calculer

$$\frac{\cos(a)}{\sin(b)\sin(c)}+\frac{\cos(b)}{\sin(a)\sin(c)}+\frac{\cos(c)}{\sin(a)\sin(b)}$$

   (réponse : 2)

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \not\equiv 0 \mod \pi$. Simplifier l'expression :

$$U_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$$

   et en déduire la limite de la suite $(U_n)$ (On pourra étudier l'expression $V_n := U_n \times \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$).

## 1.5 Dérivabilité des fonctions trigonométriques

De part leurs définitions, les fonctions cos, sin et tan sont continues sur leur ensemble de définition.

**Proposition 1.2** *La fonction* sin *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, nous avons :*

$$\sin'(t) = \cos(t)$$

*preuve:*
Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$. En reprenant la figure de la page 7, nous trouvons l'encadrement :

$$t\cos(t) \leqslant \sin(t) \leqslant t$$

(Sur ladite figure, nous avons les inégalités de longueur $HM(t) \leqslant \text{longueur}(\widehat{AM(t)}) \leqslant AT$ ; la dernière inégalité s'obtenant en remarquant que l'aire de la portion de disque délimitée par les points $O$, $A$ et $M(t)$ vaut $t/2$ et est plus petite que l'aire du triangle $OAT$, qui vaut $\tan(t)/2$). Ce qui prouve[7](en constatant que la même inégalité est vraie pour $t \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ en ajoutant des valeurs absolues) que la fonction sin est dérivable en 0 de nombre dérivée $\cos(0) = 1$. Nous avons alors pour $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, l'inégalité :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{1-\cos(t)}{t} &\leqslant \frac{1}{t}\cdot\frac{\sin^2(t)}{1+\cos(t)} \\ &\leqslant \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \cdot |\sin(t)| \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la fonction cos est dérivable en 0 de dérivée nulle. Maintenant fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. D'après les formules d'addition, nous trouvons :

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0)\cos(h)-\sin(x_0)}{h} + \cos(x_0)\cdot\frac{\sin(h)-0}{h}$$

Nous en déduisons que la fonction sin est dérivable en $x_0$ et $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$. □

**Remarque 1.3** Au cours de cette démonstration, nous avons vu que :

$$\frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{1+\cos(t)}\cdot\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$$

[7] Ceci prouve aussi que la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ admet une limite en 0.

Nous en déduisons la limite :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{t^2} &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\cos(t)}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

**Corollaire 1.4** *Les fonctions* cos, sin *et* tan *sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur leur ensemble de définition. En particulier, nous avons, pour tout* $t \in \mathbb{R}$*,*

$$\cos'(t) = -\sin(t)$$

*et pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *tel que* $t \not\equiv 0 \bmod \frac{\pi}{2}$*,*

$$\begin{aligned}\tan'(t) &= 1+\tan^2(t)\\ &= \frac{1}{\cos^2(t)}\end{aligned}$$

*preuve:*
Nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité $\cos(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ et donc en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$. Une récurrence immédiate nous assure que les fonctions sin et cos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Nous en déduisons alors que la fonction tan est elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition. Les formules pour les dérivées résultent du théorème sur la dérivée de fonctions composées. $\square$

# 2 Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

## 2.1 La fonction Arcsin

**Définition 2.1** *La fonction* sin *est continue, strictement croissante sur l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *et nous avons* $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$*. La fonction* sin *admet donc une fonction réciproque définie sur l'intervalle* $[-1, 1]$*. Nous notons* Arcsin *cette fonction. Par définition, pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$*, nous avons l'équivalence :*

$$\mathrm{Arcsin}(y) = x \iff \begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin(x) = y \end{cases}$$

Remarquons que la fonction Arcsin est tout comme la fonction sin, impaire. Maintenant d'après le théorème sur les fonctions réciproques des fonctions continues strictement monotones, nous savons que la fonction Arcsin est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-1, 1]$. De plus nous savons que sa courbe représentative est l'image par la réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$ :

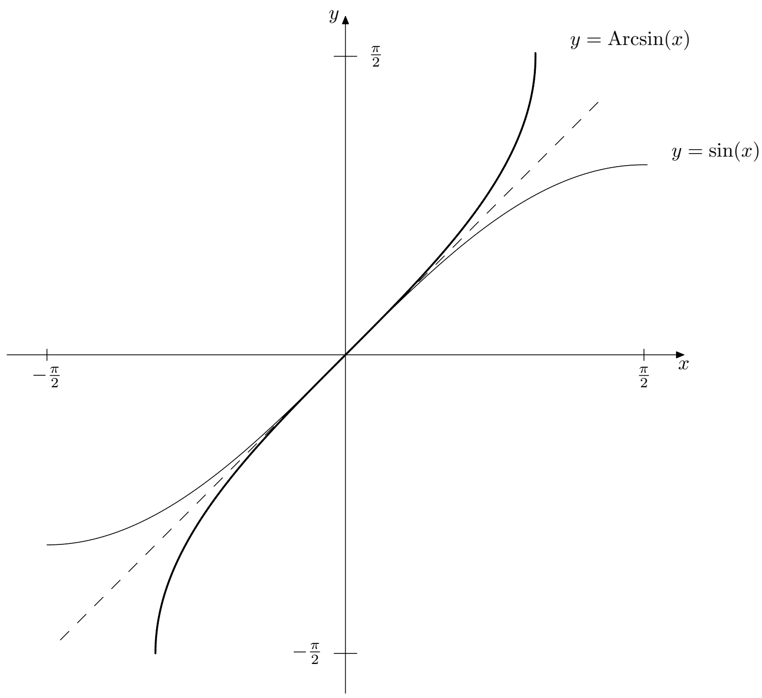


FIG. 10 – La courbe représentative de la fonction Arcsin

Maintenant d'après le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques, nous savons que la fonction est dérivable sur $]-1,1[$ et que pour tout $y \in ]-1,1[$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arcsin}'(y) &= \frac{1}{\sin'(\mathrm{Arcsin}(y))} \\
&= \frac{1}{\cos(\mathrm{Arcsin}(y))} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\mathrm{Arcsin}(y))}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}
\end{aligned}$$

car sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction cos est positive. De plus le théorème de la limite de la dérivée nous assure que Arcsin admet une dérivée infinie en $\pm 1$. Enfin, nous en déduisons que la fonction Arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

## 2.2 La fonction Arccos

**Définition 2.2** *La fonction* cos *est continue, strictement décroissante sur l'intervalle* $[0,\pi]$ *et nous avons* $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$. *La fonction* cos *admet donc une fonction réciproque définie sur l'intervalle* $[-1,1]$. *Nous notons* Arccos *cette fonction. Par définition, pour tout* $y \in [-1,1]$, *nous avons l'équivalence :*

$$\mathrm{Arccos}(y) = x \iff \begin{cases} x \in [0,\pi] \\ \cos(x) = y \end{cases}$$

D'après le théorème sur les fonctions réciproques des fonctions continues strictement monotones, nous savons que la fonction Arccos est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1,1]$. De plus nous savons que sa courbe représentative est l'image par la réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$ :

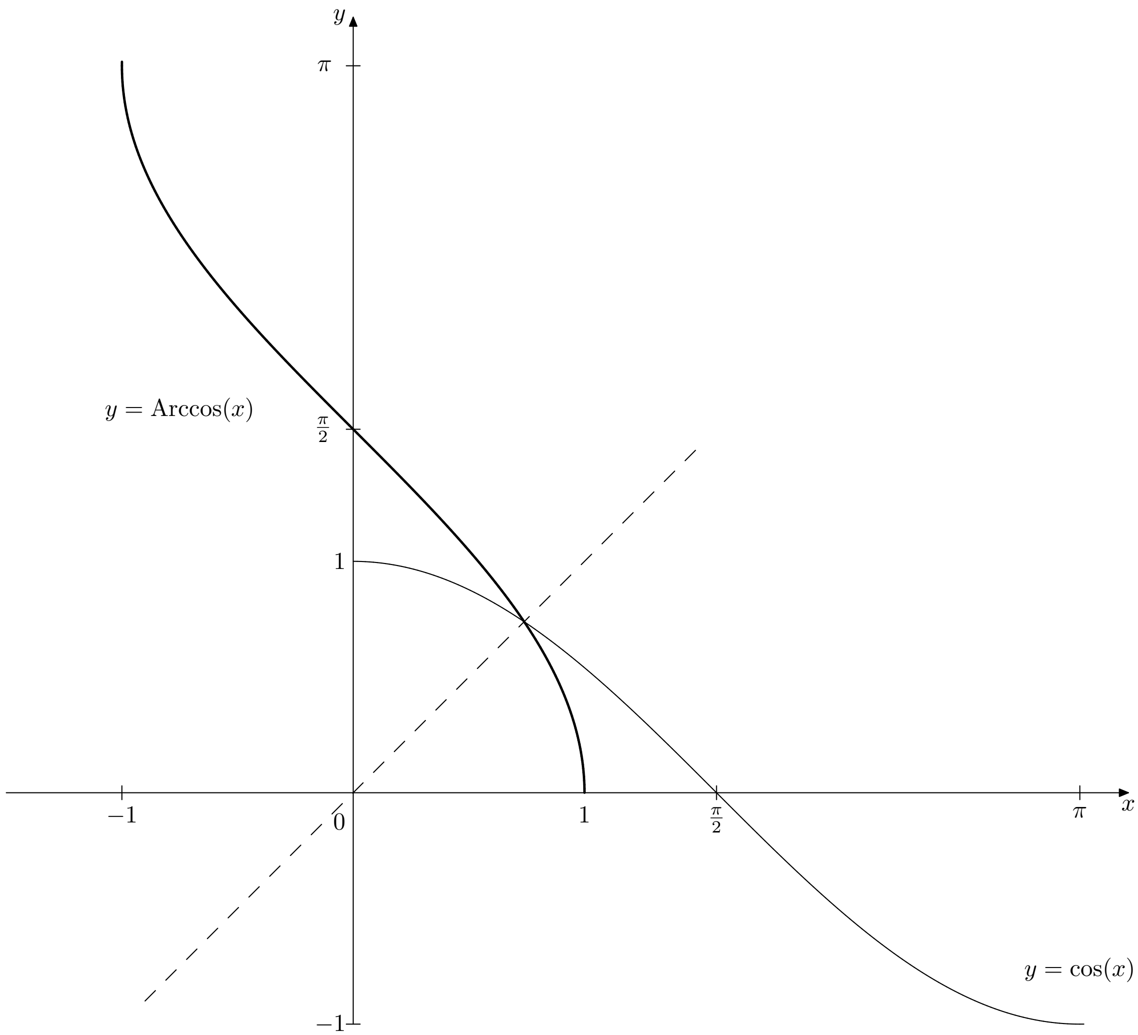


FIG. 11 – La courbe représentative de la fonction Arccos

Maintenant d'après le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques, nous savons que la fonction Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et que pour tout $y \in ]-1,1[$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arccos}'(y) &= \frac{1}{\cos'(\mathrm{Arccos}(y))} \\
&= -\frac{1}{\sin(\mathrm{Arccos}(y))} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\mathrm{Arccos}(y))}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}
\end{aligned}$$

car sur l'intervalle $[0,\pi]$, la fonction sin est positive. De plus le théorème de la limite de la dérivée nous assure que Arccos admet une dérivée infinie en $\pm 1$. Enfin, nous en déduisons que la fonction Arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

## 2.3 La fonction Arctan

**Définition 2.3** *La fonction* tan *est continue, strictement croissante sur l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *et nous avons* $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$. *La fonction* tan *admet donc une fonction réciproque définie sur* $\mathbb{R}$. *Nous* *notons* Arctan *cette fonction. Par définition, pour tout* $y, x \in \mathbb{R}$*, nous avons l'équivalence :*

$$\operatorname{Arctan}(y) = x \iff \begin{cases} x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \\ \tan(x) = y \end{cases}$$

Puisque l'application tan restreinte à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est impaire, il en est de même de l'application réciproque Arctan. D'après le théorème sur les fonctions réciproques des fonctions continues strictement monotones, nous savons que la fonction Arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus nous savons que sa courbe représentative est l'image par la réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$ :

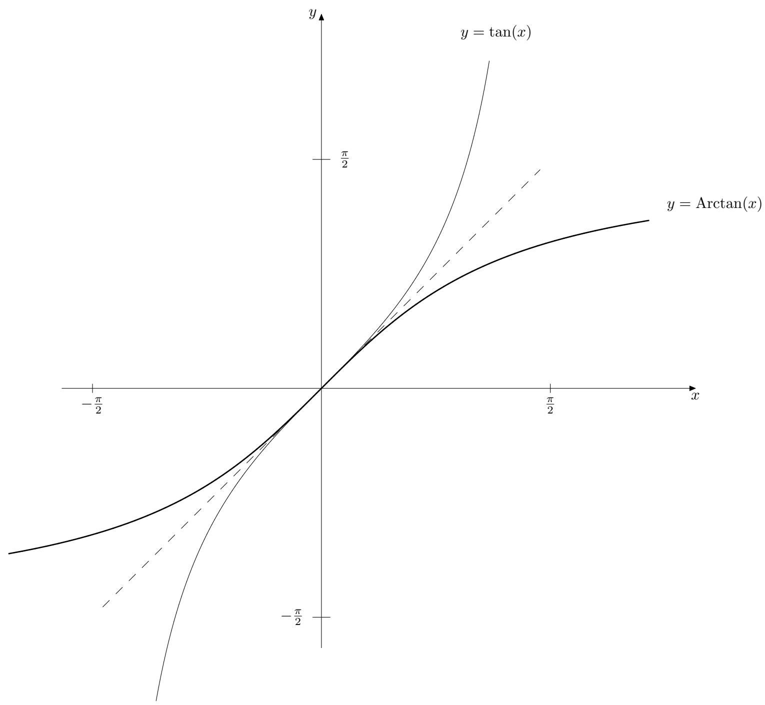


FIG. 12 – La courbe représentative de la fonction Arctan

Maintenant d'après le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques, nous savons que la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan}'(y) &= \frac{1}{\tan'(\operatorname{Arctan}(y))} \\ &= \frac{1}{1 + \tan(\operatorname{Arctan}(y))} \\ &= \frac{1}{1 + y^2} \end{aligned}$$

Puisque la dérivée de tan ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, nous en déduisons que la fonction Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**Remarque 2.4** Puisque nous avons $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$, nous avons aussi $\operatorname{Arctan}(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Et puisque Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, nous en déduisons que :

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. nous avons :

$$\begin{aligned}
\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right) &= \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{\tan(\operatorname{Arctan}(x))} \\
&= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)\right)
\end{aligned}$$

Si $x > 0$, alors $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ et par suite, dans ce cas, $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$. Si $x < 0$, puisque tan est $\pi$-périodique, nous en déduisons que $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$. Nous avons donc montré que :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{Arctan}(x) &= \frac{\pi}{2} \\
\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{Arctan}(x) &= -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

## 2.4 Formules faisant intervenir les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

Par définition, nous avons :

$$\begin{array}{rlrl}
\forall x \in [-1,1], & \sin(\operatorname{Arcsin}(x)) = x & \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & \operatorname{Arcsin}(\sin(x)) = x \\
\forall x \in [-1,1], & \cos(\operatorname{Arccos}(x)) = x & \forall x \in [0,\pi], & \operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x \\
\forall x \in \mathbb{R}, & \tan(\operatorname{Arctan}(x)) = x & \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, & \operatorname{Arctan}(\tan(x)) = x
\end{array}$$

D'autre part, nous avons vu que pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{et} \ \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

Maintenant, nous pouvons traduire toutes nos formules trigonométriques pour les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques. Ainsi pour tout $x \in [-1,1]$, nous avons :

$$\operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$$

De même, pour tout $x \in [-1,1]$

$$\operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos}(x)$$

Les cas particuliers des formules d'addition donnent que pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned}
\cos(2\operatorname{Arccos}(x)) &= 2x^2 - 1 \\
\cos(2\operatorname{Arcsin}(x)) &= 1 - 2x^2 \\
\sin(2\operatorname{Arcsin}(x)) &= 2x\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

Et les formules faisant intervenir la fonction tangente se traduisent par, pour tout $x \in ]-1,1[$ :

$$\tan(\operatorname{Arcsin}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

En remarquant que pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, nous avons $1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$, nous trouvons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\cos^2(\operatorname{Arctan}(x)) = 1 + x^2$$

et comme sur $]-1,1[$, nous avons $\mathrm{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, nous trouvons $\cos(\mathrm{Arctan}(x)) > 0$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}\cos(\mathrm{Arctan}(x)) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \sin(\mathrm{Arctan}(x)) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

Les cas particuliers des formules d'addition donnent alors, pour tout $x \in [-1,1]$ :

$$\begin{aligned}\cos(2\,\mathrm{Arctan}(x)) &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ \sin(2\,\mathrm{Arctan}(x)) &= \frac{2x}{1+x^2}\end{aligned}$$

et pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$\tan(2\,\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{2x}{1-x^2}$$

qui ne sont pas sans rappeler les formules du changement de variable ...

# 3 Fonctions logarithmes et exponentielles

## 3.1 La fonction logarithme népérien

**Définition 3.1** *La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 1/x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle admet donc*[8] *des primitives sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Nous notons $\ln$ l'unique primitive vérifiant $\ln(1) = 0$. Nous avons donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,*

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

*La fonction $\ln\colon ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ ainsi définie est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.*

**Remarque 3.2** Du fait même de sa définition, la fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**Proposition 3.3** *Nous avons pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$*

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

*preuve:*
Cela résulte de la relation de Chasles et d'un changement de variable :

$$\begin{aligned}\ln(ab) &= \int_1^{ab} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_1^b \frac{bdt}{bt} = \ln(a) + \ln(b)\end{aligned}$$

□

**Remarque 3.4** Nous pouvons reformuler la proposition 3.3 de la manière suivante : la fonction $\ln$ est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur le groupe $(\mathbb{R}, +)$.

[8] Voir le cours d'intégration.

**Corollaire 3.5** *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Nous avons pour tout $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b) \\ \ln\left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right) &= \sum_{i=1}^{m} \ln(a_i) \\ \ln\left(a^n\right) &= n\ln(a) \end{aligned}$$

*preuve:*
La première égalité résulte[9] du changement de variable $\varphi(t) = 1/t$ :

$$\begin{aligned} \ln(b) &= \int_1^b \frac{dt}{t} = \int_1^{\frac{1}{b}} \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)} \\ &= -\int_1^{\frac{1}{b}} \frac{dt}{t} = -\ln\left(\tfrac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

La seconde égalité résulte d'une récurrence et la troisième est un cas particulier de la seconde. □

D'après ce qui précède nous pouvons dresser le tableau de variation :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\ln'(x)$ | $\Vert$ + | |
| $\ln(x)$ | $\Vert$ $\nearrow$ | |

Fig. 13 – Tableau de variation de la fonction ln

Puisque la fonction ln est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, nous avons

$$\ln(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} \ln(x), \lim_{x\to+\infty} \ln(x)\right[$$

De plus, puisque ln est croissante, sa limite en $+\infty$ est celle de la suite $\ln(2^n) = n\ln(2)$ ; puisque $\ln(1) = 0$, le réel $\ln(2)$ est strictement positif, la limite de la suite est $+\infty$. De même, la limite en $0^+$ de la fonction ln est la limite de la suite $\ln(2^{-n}) = -n\ln(2)$ c'est-à-dire $-\infty$. Ainsi ln est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ **sur** $\mathbb{R}$. Nous notons $e$ l'unique élément de $\mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln(e) = 1$. Nous pouvons maintenant tracer sa courbe représentative :

[9] En utilisant l'idée de la remarque précédente (ln est un morphisme de groupes), et en fixant $b \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons, d'après la proposition précédente, l'égalité $0 = \ln(1) = \ln(b) + \ln\left(b^{-1}\right)$, ce qui implique que $\ln\left(b^{-1}\right) = -\ln(b)$.

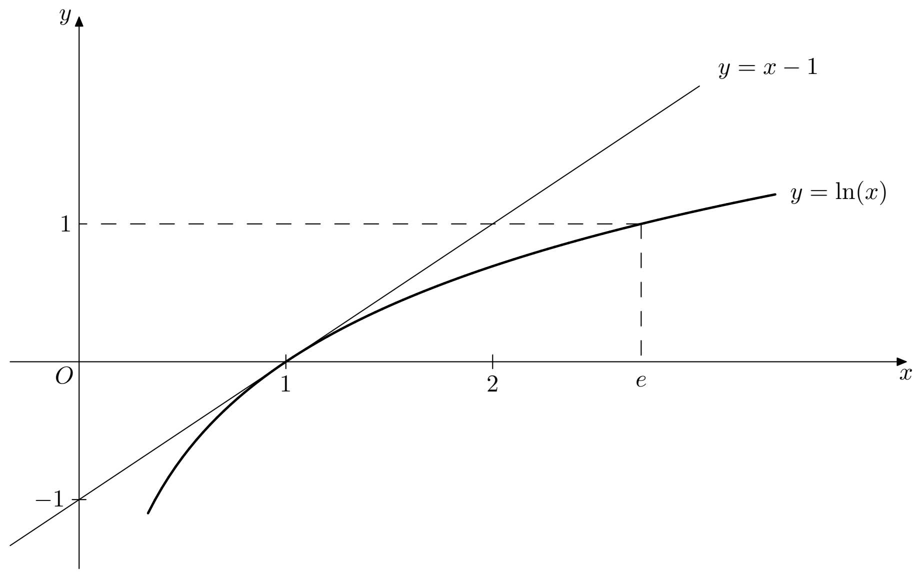


FIG. 14 – La courbe représentative de la fonction ln

**Exercice 3.6** Montrer, comme le suggère la figure précédente, que nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'inégalité $\ln(x) \leqslant x - 1$.

## 3.2 La fonction exponentielle

**Définition 3.7** *La fonction* ln *est continue strictement croissante sur* $]0, +\infty[$ *; elle définie une bijection de* $]0, +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$*. Nous notons* exp *sa fonction réciproque. Par définition, pour* $x, y \in \mathbb{R}$*, nous avons l'équivalence :*

$$\exp(x) = y \iff \begin{cases} y \in ]0, +\infty[ \\ \ln(y) = x \end{cases}$$

*la fonction* exp *est une application continue strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et puisque* ln *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et que sa dérivée est strictement positive, il en est de même de la fonction* exp *sur* $\mathbb{R}$*. De plus, nous avons, pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \frac{1}{\ln'(\exp(x))} \\ &= \exp(x) \end{aligned}$$

*Enfin, nous en déduisons que* $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$*.*

**Proposition 3.8** *Soit* $m \in \mathbb{N}^*$ *et* $n \in \mathbb{Z}$*. Nous avons pour tout* $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_m$

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b) \tag{3.1}$$

$$\exp\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \tag{3.2}$$

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) = \prod_{i=1}^{m} \exp(a_i) \tag{3.3}$$

$$\exp(na) = (\exp(x))^n \tag{3.4}$$

*preuve:*
Il s'agit simplement d'une traductions des propriétés vérifiées par la fonction logarithme. □

Nous déduisons de tout ce qui précède que la courbe représentative de la fonction exp est la suivante :

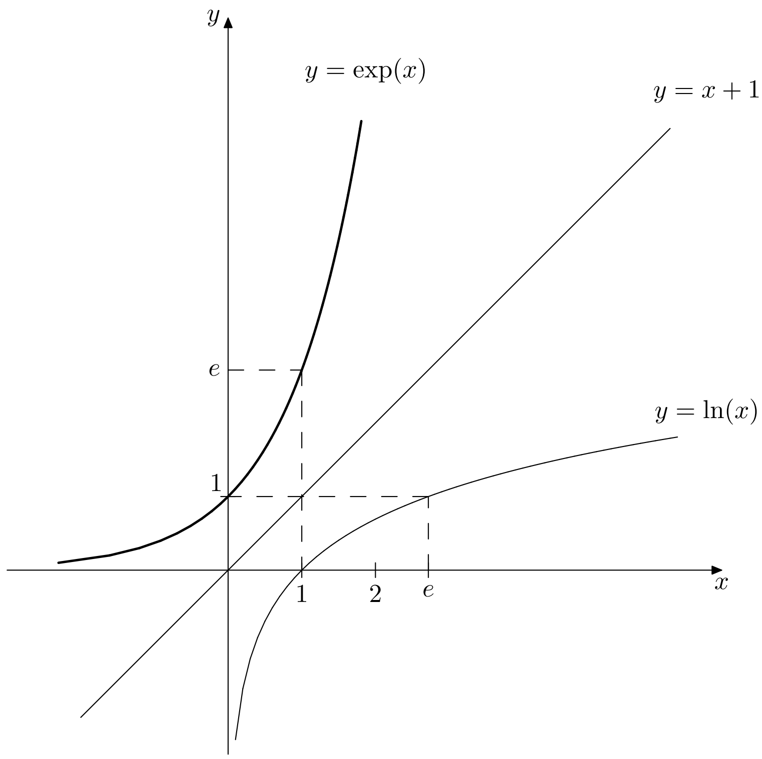


FIG. 15 – La courbe représentative de la fonction exp

### 3.3 Définition de $a^x$ pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$

Nous cherchons à donner un sens à $a^x$ pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Fixons $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit maintenant $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous savons qu'il existe un réel strictement positif $y$ tel que $y^q = a$. Or nous savons que :

$$\left(\exp\left(\frac{1}{q}\ln(a)\right)\right)^q = \exp(\ln(a)) = a$$

Puisque la fonction exp est positive sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $x \mapsto x^q$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, nous en déduisons que $\exp\left(\frac{1}{q}\ln(a)\right) = y$. Ce qui démontre bien qu'il existe un unique réel $y$ tel que $y^q = a$. On note alors $a^{\frac{1}{q}} := y$. Maintenant si $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, il s'écrit $x = \frac{p}{q}$ avec $p$ et $q$ deux entiers relatifs, pour définir $a^x$, il suffit de poser $y := a^{\frac{1}{q}}$ comme vu précédemment puis de poser $a^x := y^p$. Nous voulons maintenant « prolonger » cette définition pour les $x$ réels ...
Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. Soit $(x_n)$ une suite de rationnels convergeant vers $x$. Alors la suite $(x_n \ln(a))$ converge vers le réel $x\ln(a)$. la fonction exp étant continue sur $\mathbb{R}$, nous en déduisons que :

$$\lim_{n\to+\infty} a^{x_n} \quad = \quad \exp(x\ln(a))$$

**Définition 3.9** *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors l'expression $a^x$ désigne la limite de la suite $(a^{x_n})$ où $(x_n)$ est une suite de rationnels convergeant vers $x$. Ainsi par définition, nous avons :*

$$a^x \quad := \quad \exp(x\ln(a))$$

**Remarques 3.10**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Grâce à la définition précédente, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\exp(x) \quad &:= \quad \exp(x\ln(e)) \\ &= \quad e^x\end{aligned}$$

2. Toujours grâce à la définition précédente, la propriété (3.4) se prolonge à $\mathbb{R}$ ; pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \exp(tx) &:= \exp\Big(t\ln(\exp(x))\Big) \\ &= \exp(x)^t \end{aligned}$$

3. Le lecteur prendra garde à ne pas généraliser la dernière égalité lorsque $x$ est un nombre complexe ; par exemple, si $x = 2i\pi$, nous trouverions :

$$\begin{aligned} (e^{2i\pi})^{\frac{1}{2}} &= e^{i\pi} \\ &= -1 \end{aligned}$$

alors que tout le monde sait que $1^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2}\ln(1)) = 1$. Le problème vient du fait qu'il n'existe pas de fonction réciproque continue sur (tout) $\mathbb{C}$ à la fonction exponentielle complexe (qu'il faudrait déjà définir).

## 3.4 Logarithme et exponentielle en base $a$

Nous fixons $a$ un réel strictement plus grand que 1. On définit alors les fonctions $\log_a$ et $\exp_a$, appelée respectivement **logarithme en base** $a$ et **exponentielle en base** $a$ en posant :

$$\begin{aligned} \log_a(x) &:= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \\ \exp_a(x) &:= a^x \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que ces deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre. On remarquera aussi que la fonction $\log_a$ est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui vaut 1 en $a$.

## 3.5 Preuve des limites usuelles concernant les fonctions logarithme et exponentielle

**Proposition 3.11** *Nous avons les assertions suivantes :*

1. *Nous avons :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons :*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$$

3. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons :*

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$$

*preuve:*
1. Cela résulte exactement du fait que la fonction ln est dérivable en 1 de dérivée 1.
2. Supposons $\alpha = 1$. Posons $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(x)}{x} = \frac{2\sqrt{x} - \ln(x)}{x}$$

et posons $h$ la fonction intermédiaire définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) := 2\sqrt{x} - \ln(x)$. La fonction $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons :

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

Nous avons pour $x > 1$, l'inégalité $h'(x) > 0$. Puisque $h(1) > 0$, nous en déduisons que pour tout $x > 1$, nous avons :

$$0 < \ln(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$$

et par suite nous trouvons la limite désirée pour $\alpha = 1$. Maintenant, si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons pour $x > 1$,

$$\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \frac{\ln(x^\alpha)}{\alpha x^\alpha}$$

et par suite la limite désirée en utilisant le théorème sur la composée des limites.
3. Il suffit de poser $x := \frac{1}{X}$. Nous avons alors, d'après le théorème de limite des fonctions composées :

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln(x) = -\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln(X)}{X^\alpha}$$

qui est nulle d'après le point 2. de la proposition. □

**Corollaire 3.12** *Nous avons les assertions suivantes :*

1. *Nous avons :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, nous avons :*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty$$

3. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, nous avons :*

$$\lim_{x \to -\infty} x^\alpha \exp(x) = 0$$

*preuve:*
1. Cela signifie exactement que la fonction exp est dérivable en 0 de dérivée 1.
2. Nous avons vu que l'assertion est vraie pour $\alpha = 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Nous savons que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0^+$. Nous en déduisons que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{\alpha}}}{\exp(x)} = 0^+$$

puis que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{\alpha}}}{\exp(x)} = 0^+$$

et comme l'application $\alpha \to \frac{1}{\alpha}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$, nous en déduisons la deuxième assertion.
3. Il suffit de raisonner comme à la proposition précédente. □

# 4 Fonctions hyperboliques

**Définition 4.1** *Nous définissons les fonctions* sh, ch *et* th *pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :*

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \mathrm{ch}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \mathrm{th}(x) &= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \end{aligned}$$

Nous en déduisons immédiatement les formules suivantes :

$$\boxed{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1}$$

et

$$1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

## 4.1 La fonction sinus hyperbolique

Nous déduisons immédiatement des propriétés de la fonction exponentielle le théorème suivant :

**Proposition 4.2** *La fonction* sh *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et en particulier, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *nous avons :*

$$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$$

Nous déduisons aussi la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = 1$$

Et par suite nous avons la représentation graphique de sh :

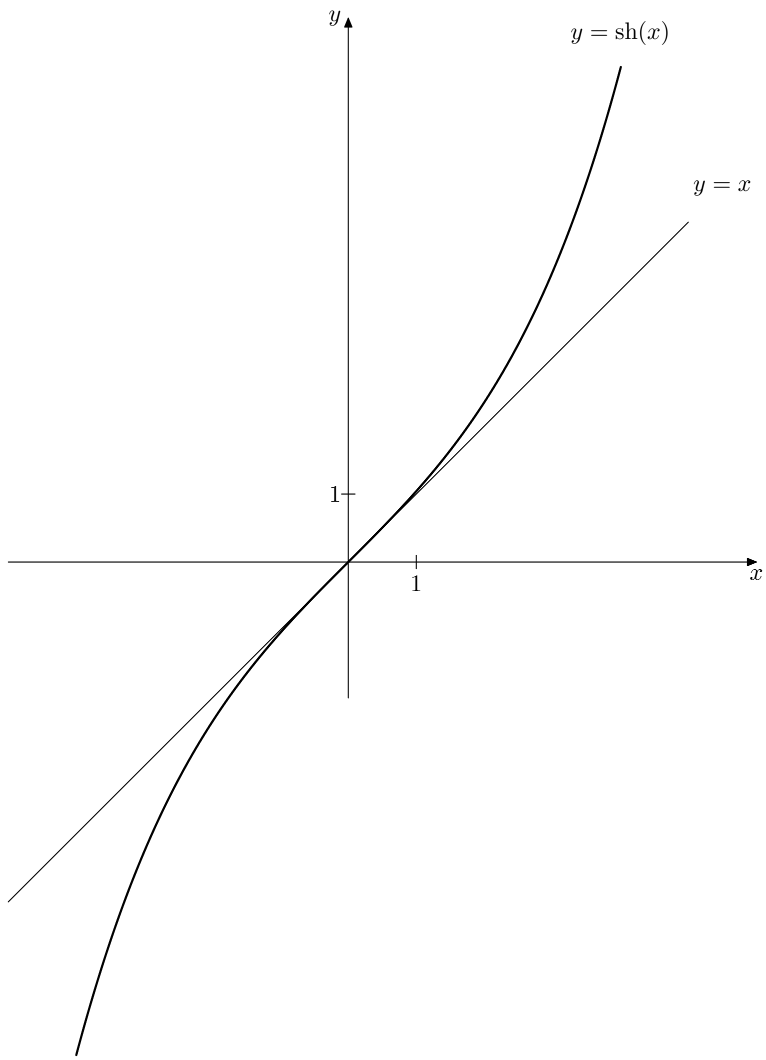


FIG. 16 – La courbe représentative de la fonction sh

## 4.2 La fonction cosinus hyperbolique

Nous déduisons immédiatement des propriétés de la fonction exponentielle le théorème suivant :

**Proposition 4.3** *La fonction* ch *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et en particulier, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *nous avons :*

$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$$

Nous déduisons aussi la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Et par suite nous avons la représentation graphique de ch :

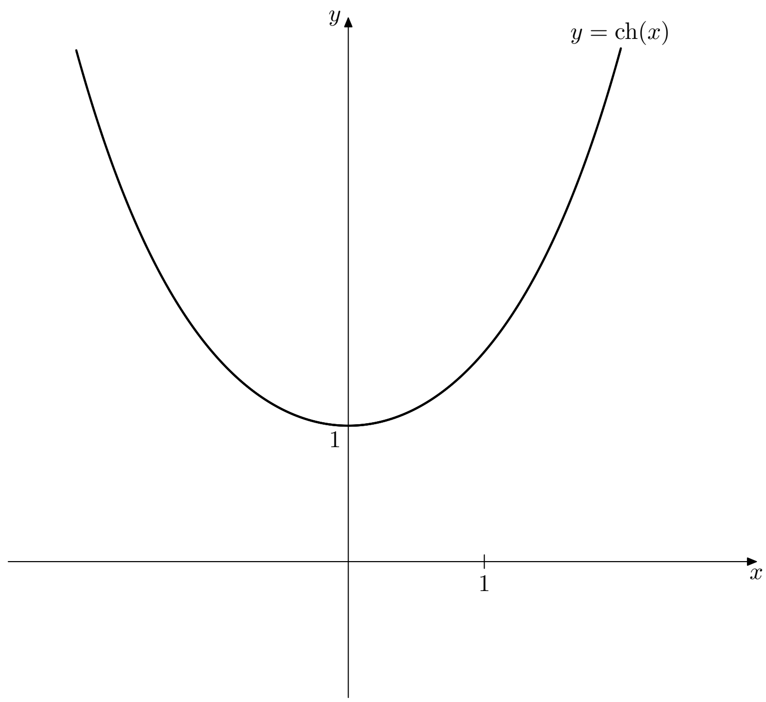


FIG. 17 – La courbe représentative de la fonction ch

## 4.3 La fonction tangente hyperbolique

Une nouvelle fois, grâce aux propriétés de la fonction exponentielle, nous trouvons le théorème suivant :

**Proposition 4.4** *La fonction* th *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et en particulier, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *nous avons :*

$$\begin{aligned} \mathrm{th}'(x) &= 1 - \mathrm{th}^2(x) \\ &= \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \end{aligned}$$

Nous déduisons aussi les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) &= -1 \\ \lim_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) &= 1 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{th}(x)}{x} &= 1 \end{aligned}$$

Et par suite nous avons la représentation graphique de th :

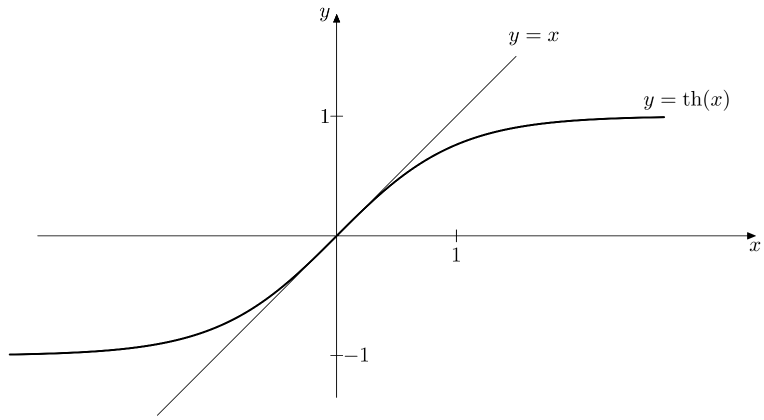


Fig. 18 – La courbe représentative de la fonction th

## 4.4 Formules de trigonométrie hyperbolique

### 4.4.1 Formules d'addition

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, nous avons les formules suivantes, dite « formules d'addition » :

$$\boxed{\begin{array}{rcccc} \mathrm{ch}(a+b) & = & \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) & + & \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) \\ \mathrm{sh}(a+b) & = & \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) & + & \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) \end{array}}$$

Démontrons la première, à titre d'exemple. Soient $a, b$ deux réels. Nous avons :

$$\begin{aligned} 4\Big(\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)\Big) &= (e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b}) \\ &= 2\Big(e^{a+b} + e^{-a-b}\Big) \\ &= 4\,\mathrm{ch}(a+b) \end{aligned}$$

Les autres formules se démontrant de la même manière. Nous en déduisons alors les autres formules d'addition :

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{ch}(a-b) & = & \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) & - & \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) \\ \mathrm{sh}(a-b) & = & \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) & - & \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) \end{array}$$

Nous avons alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(2t) &= 2\,\mathrm{ch}^2(t) - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2(t) + 1 \\ \mathrm{sh}(2t) &= 2\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{ch}^2(t) &= \frac{\mathrm{ch}(2t)+1}{2} \\ \mathrm{sh}^2(t) &= \frac{\mathrm{ch}(2t)-1}{2} \end{aligned}$$

### 4.4.2 Formules de transformation

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, nous avons les formules suivantes, dite « formules de transformation » :

$$\begin{array}{rcllll} \mathrm{ch}(a) + \mathrm{ch}(b) & = & 2 & \mathrm{ch}\left(\dfrac{a+b}{2}\right) & \mathrm{ch}\left(\dfrac{a-b}{2}\right) \\ \mathrm{ch}(a) - \mathrm{ch}(b) & = & 2 & \mathrm{sh}\left(\dfrac{a+b}{2}\right) & \mathrm{sh}\left(\dfrac{a-b}{2}\right) \\ \mathrm{sh}(a) + \mathrm{sh}(b) & = & 2 & \mathrm{sh}\left(\dfrac{a+b}{2}\right) & \mathrm{ch}\left(\dfrac{a-b}{2}\right) \\ \mathrm{sh}(a) - \mathrm{sh}(b) & = & 2 & \mathrm{sh}\left(\dfrac{a-b}{2}\right) & \mathrm{ch}\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \end{array}$$

Ces formules se déduisent des formules d'addition.

### 4.4.3 Autres formules utiles

Nous avons, pour tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{rcrcr} \mathrm{ch}(3t) & = & 4\,\mathrm{ch}^3(t) & - & 3\,\mathrm{ch}(t) \\ \mathrm{sh}(3t) & = & 4\,\mathrm{sh}^3(t) & + & 3\,\mathrm{sh}(t) \end{array}$$

ces formules découlant[10] des formules précédentes.

### 4.4.4 Formules de trigonométrie hyperbolique faisant intervenir la fonction th

Nous avons pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)}$$

Ces formules s'obtiennent en utilisant les formules d'addition et en divisant par $\mathrm{ch}(a) \cdot \mathrm{ch}(b)$. Et en particulier,

$$\mathrm{th}(2a) = \frac{2\,\mathrm{th}(a)}{1 - \mathrm{th}^2(a)}$$

### 4.4.5 Changement de variable

Le changement de variable suivant est parfois utile au calcul d'intégrales. Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons :

$$t \ := \ \mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)$$

Nous avons alors les formules suivantes :

$$\mathrm{ch}(a) = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad , \quad \mathrm{sh}(a) = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{et} \quad \tan(a) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Cela résulte du fait que $1 - t^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{a}{2}\right)}$, et que $1 + t^2 = \frac{1}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{a}{2}\right)}$ et des formules d'additions.

**Remarque 4.5** Le moyen mnémotechnique[11] de retenir les formules concernant les fonctions hyperboliques, consiste à connaître les formules de trigonométrie et à opérer le changement :

$$\begin{array}{rcl} \cos & \mapsto & \mathrm{ch} \\ \sin & \mapsto & i\,\mathrm{sh} \end{array}$$

où $i^2 = -1$ et à éliminer les $i$ qui restent seuls dans la formule obtenue.

**Exercice 4.6**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer en fonction de $\mathrm{ch}(nx)$ et $\mathrm{sh}(nx)$ les expressions : $(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^n$ et $(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^n$
2. Démontrer que que pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons : $\mathrm{ch}(3x) = 4\,\mathrm{ch}^3(x) - 3\,\mathrm{ch}(x)$

[10] Elle découlent aussi d'une utilisation immédiate de la formule du binôme de Newton.

[11] Il ne s'agit pas seulement d'une astuce mnémotechnique ; lorsqu'on définit les fonctions circulaires de la variable **complexe** (cos, sin, ch et sh) ; il apparaît que pour tout $x \in \mathbb{R}$ (en fait $\mathbb{C}$), nous avons les formules $\sin(ix) = i\,\mathrm{sh}(x)$ et $\cos(ix) = \mathrm{ch}(x)$.

# 5 Fonctions hyperboliques réciproques

## 5.1 La fonction Argsh

**Définition 5.1** *La fonction* sh *est continue, strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et nous avons* $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. *La fonction* sh *admet donc une fonction réciproque définie sur* $\mathbb{R}$. *Nous notons* Argsh *cette fonction. Par définition, pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *nous avons l'équivalence :*

$$\mathrm{Argsh}(y) = x \iff \mathrm{sh}(x) = y$$

D'après le théorème sur les fonctions réciproques des fonctions continues strictement monotones, nous savons que la fonction Argsh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus nous savons que sa courbe représentative est l'image par la réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$ de la courbe représentative de celle de sh :

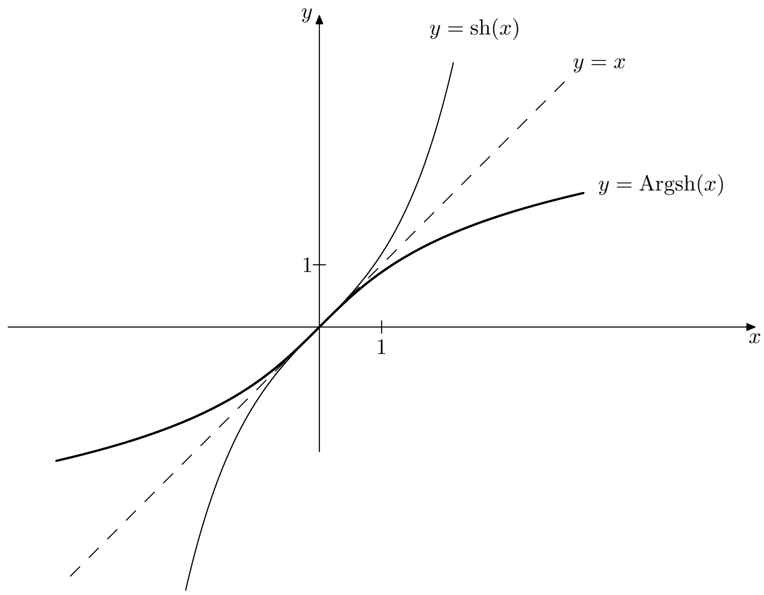


Fig. 19 – La courbe représentative de la fonction Argsh

Maintenant d'après le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques, nous savons que la fonction est dérivable sur $]-1,1[$ et que pour tout $y \in ]-1,1[$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Argsh}'(y) &= \frac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{Argsh}(y))} \\
&= \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}(y))} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}(y))}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}
\end{aligned}$$

car la fonction ch est positive sur $\mathbb{R}$. Nous en déduisons que la fonction Argsh est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Remarquons aussi que la fonction Argsh, comme sh est impaire. Nous avons aussi immédiatement les limites :

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to -\infty} \mathrm{Argsh}(y) &= -\infty \\
\lim_{y \to +\infty} \mathrm{Argsh}(y) &= +\infty \\
\lim_{y \to 0} \frac{\mathrm{Argsh}(y)}{y} &= 1
\end{aligned}$$

La dernière limite exprimant le fait que Argsh est dérivable en 0.

**Remarque 5.2** Nous avons pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Argsh}(y) \quad = \quad \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

En effet, fixons $y \in \mathbb{R}$. Posons $x := \mathrm{Argsh}(y)$. Nous avons donc $2y = e^x - e^{-x}$ ; ce qui exprime que $e^x$ est racine du polynôme $X^2 - 2yX - 1$. Mais comme $e^x > 0$, nous en déduisons, en trouvant les racines de ce polynôme, que : $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$. Ce qui est équivalent au fait que $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$, comme désiré.

## 5.2 La fonction Argch

**Définition 5.3** *La fonction* ch *est continue, strictement croissante sur l'intervalle* $[0, +\infty[$ *et nous avons* $\mathrm{ch}\left([0, +\infty[\right) = [1, +\infty[$*. La fonction* ch *admet donc une fonction réciproque définie sur l'intervalle* $[1, +\infty[$ *à valeurs dans* $[0, +\infty[$*. Nous notons* Argch *cette fonction. Par définition, pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R} \times [1, +\infty]$*, nous avons l'équivalence :*

$$\mathrm{Argch}(y) = x \iff \begin{cases} x \in [0, +\infty] \\ \mathrm{ch}(x) = y \end{cases}$$

D'après le théorème sur les fonctions réciproques des fonctions continues strictement monotones, nous savons que la fonction Argch est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. De plus nous savons que sa courbe représentative est l'image par la réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$ de la courbe représentative de Argch :

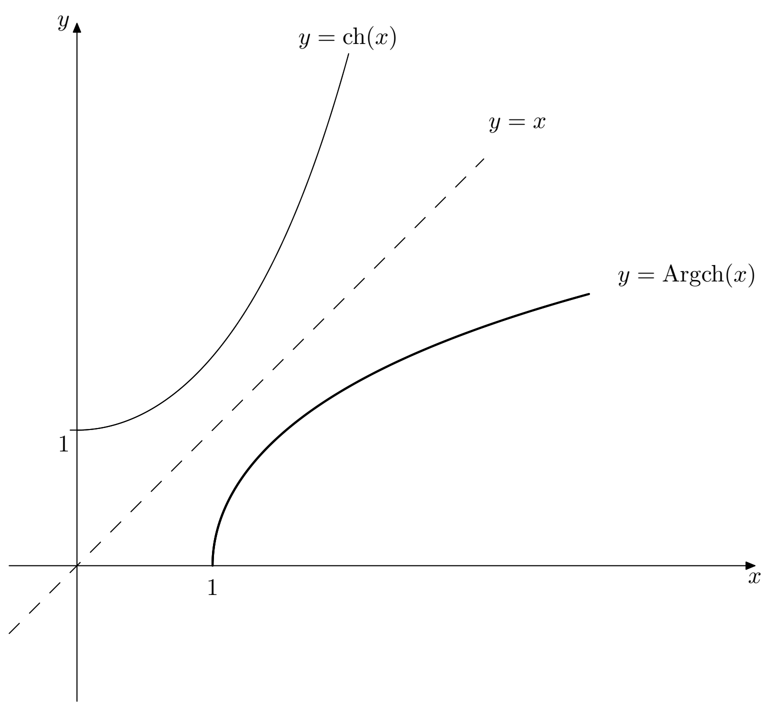


FIG. 20 – La courbe représentative de la fonction Arccos

Maintenant d'après le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques, nous savons que la fonction Argch est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que pour tout $y \in ]1,+\infty[$, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathrm{Argch}'(y) &= \frac{1}{\mathrm{ch}'(\mathrm{Argch}(y))} \\ &= \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}(y))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(\mathrm{Argch}(y)) - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\end{aligned}$$

car sur l'intervalle $[0,+\infty[$, la fonction sh est positive. Nous en déduisons que la fonction Argch est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.

**Remarque 5.4** Nous avons pour tout $y \in [1,+\infty[$,

$$\mathrm{Argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

En effet, fixons $y \in [1,+\infty[$. Posons $x := \mathrm{Argch}(y)$. Nous avons donc $2y = e^x + e^{-x}$ ; ce qui exprime que $x$ est racine du polynôme $X^2 - 2yX + 1$. Mais comme $e^x > 0$, nous en déduisons que : $e^x = y + \sqrt{y^2-1}$. Ce qui est équivalent au fait que $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$, comme désiré.

## 5.3 La fonction Argth

**Définition 5.5** *La fonction* th *est continue, strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et nous avons* $\mathrm{th}(\mathbb{R}) = ]-1,1[$. *La fonction* th *admet donc une fonction réciproque définie sur* $]-1,1[$. *Nous notons* Argth *cette fonction. Par définition, pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}\times]-1,1[$, *nous avons l'équivalence :*

$$\mathrm{Argth}(y) = x \iff \mathrm{th}(x) = y$$

D'après le théorème sur les fonctions réciproques des fonctions continues strictement monotones, nous savons que la fonction Arctan est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-1,1[$. De plus nous savons que sa courbe représentative est l'image par la réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$ de celle de th :

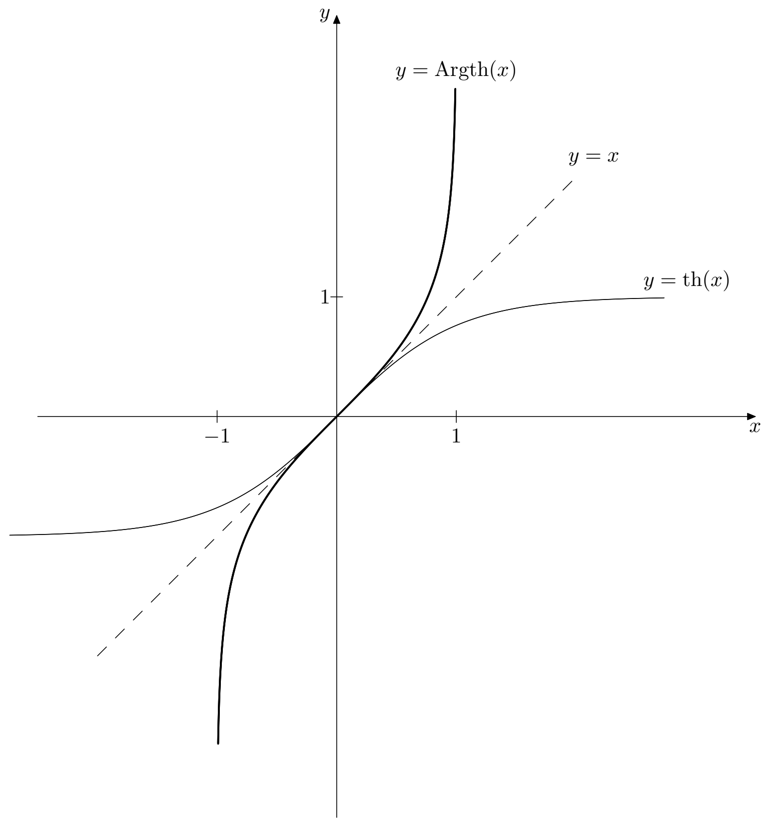


FIG. 21 – La courbe représentative de la fonction Argth

Maintenant d'après le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques, nous savons que la fonction Argth est dérivable sur $]-1,1[$ et que pour tout $y \in ]-1,1[$, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathrm{Argth}'(y) &= \frac{1}{\mathrm{th}'(\mathrm{Argth}(y))}\\ &= \frac{1}{1-\mathrm{th}^2(\mathrm{Argth}(y))}\\ &= \frac{1}{1-y^2}\end{aligned}$$

Nous avons aussi immédiatement les limites :

$$\begin{aligned}\lim_{y\to -1} \mathrm{Argth}(y) &= -\infty\\ \lim_{y\to 1} \mathrm{Argth}(y) &= +\infty\\ \lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{Argth}(y)}{y} &= 1\end{aligned}$$

La dernière limite exprimant le fait que Argth est dérivable en 0 ; de nombre dérivée égal à 1. Nous en déduisons que la fonction Argth est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

**Remarque 5.6** Nous avons pour tout $y \in ]-1,1[$,

$$\mathrm{Argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

En effet, fixons $y \in ]-1,1[$. Posons $x := \mathrm{Argth}(y)$. Nous avons donc $y(e^x+e^{-x}) = e^x - e^{-x}$ ; ce qui exprime que $x$ est racine du polynôme $(y-1)X^2+(y+1)$. Mais comme $e^x > 0$, nous en déduisons que : $e^x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$. Ce qui est bien équivalent au fait que $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

## 5.4 Formules faisant intervenir les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques

Par définition, nous avons :

$$\begin{array}{rlrl} \forall x \in \mathbb{R}, & \mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}(x)) = x & \forall x \in \mathbb{R}, & \mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x \\ \forall x \in [1,+\infty[, & \mathrm{ch}(\mathrm{Argch}(x)) = x & \forall x \in [0,+\infty[, & \mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x)) = x \\ \forall x \in ]-1,1[, & \mathrm{th}(\mathrm{Argth}(x)) = x & \forall x \in \mathbb{R}, & \mathrm{Argth}(\mathrm{th}(x)) = x \end{array}$$

D'autre part, nous avons vu que pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2} \qquad \text{et } \mathrm{sh}(\mathrm{Argch}(x)) = \sqrt{x^2-1}$$

Maintenant, nous pouvons traduire toutes nos formules concernant les fonctions hyperboliques. Ainsi les cas particuliers des formules d'addition donnent que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ch}(2\,\mathrm{Argsh}(x)) & = & 2x^2+1 \\ \mathrm{sh}(2\,\mathrm{Argsh}(x)) & = & 2x\sqrt{1+x^2} \end{array}$$

et pour $x \in [0,+\infty[$ :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ch}(2\,\mathrm{Argch}(x)) & = & 2x^2-1 \\ \mathrm{sh}(2\,\mathrm{Argch}(x)) & = & 2x\sqrt{x^2-1} \end{array}$$

Et les formules faisant intervenir la fonction tangente se traduisent par, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\mathrm{th}(\mathrm{Argsh}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

et pour tout $x \in [1,+\infty[$ :

$$\mathrm{th}(\mathrm{Argch}(x)) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

En remarquant que pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $1-\mathrm{th}^2(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}$, nous trouvons que pour tout $x \in ]-1,1[$ :

$$\mathrm{ch}^2(\mathrm{Argth}(x)) = \frac{1}{1-x^2}$$

et comme ch est positive sur $\mathbb{R}$, et que $\mathrm{sh}(x)$ est du signe de $\mathrm{Argth}(x)$, nous avons, pour tout $x \in ]-1,1[$ :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ch}(\mathrm{Argth}(x)) & = & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \mathrm{sh}(\mathrm{Argth}(x)) & = & \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

Les cas particuliers des formules d'addition donnent alors, pour tout $x \in ]-1,1[$ :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ch}(2\,\mathrm{Argth}(x)) & = & \dfrac{1+x^2}{1-x^2} \\ \mathrm{sh}(2\,\mathrm{Argth}(x)) & = & \dfrac{2x}{1-x^2} \\ \mathrm{th}(2\,\mathrm{Argth}(x)) & = & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

qui ne sont pas, une nouvelle fois, sans rappeler les formules du changement de variable ...