Analyse 1, Groupe MI201 A2 Le 30 mai 2013

Test n° 3

Exercice 1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(1+\sin x)$$

Exercice 2. En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}$, calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

Corrigé 1. Il suffit de composer le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ avec celui de la fonction $x \mapsto \sin x$. Nous avons

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

et

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

d'où

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin x) &= (x - \frac{x^3}{6}) - \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{3}(x - \frac{x^3}{6})^3 + x^3\varepsilon(x)\\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Corrigé 2. On pose $u = \sqrt{e^x - 1}$, d'où $x = \ln(u^2+1)$. La relation entre les éléments différentiels est :

$$dx = \frac{2u}{u^2+1}du$$

Enfin, quand x parcourt l'intervalle $[0, \ln 2]$, u parcourt l'intervalle $[0, 1]$. D'après la formule du changement de variable, il vient :

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx &= \int_0^1 u\frac{2u}{u^2+1}\, du = 2\int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}\, du\\ &= 2\int_0^1 1 - \frac{1}{u^2+1}\, du\\ &= 2[u - \arctan(u)]_0^1\\ &= 2 - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$