Test n° 2

Exercice 1. Calculer la valeur de :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ \cos(t) - 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est continue en 0.
2. Montrer que f est dérivable en 0. Quelle est la valeur de $f'(0)$?

Corrigé 1. Il vient

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} &= \frac{(1+\sin x)-(1-\sin x)}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})} \\ &= \frac{\sin x}{x}\frac{2}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}} \end{aligned}$$

Sachant que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on en déduit que la limite cherchée vaut 1.

Corrigé 2. 1. Nous avons

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} e^{1/t} = 0 = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} (\cos(t)-1) = f(0)$$

ce qui montre que f est continue en 0.

2. Nous avons

$$\frac{f(t)-f(0)}{t} = \begin{cases} \frac{e^{1/t}}{t} & \text{si } t < 0 \\ \frac{\cos(t)-1}{t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On calcule les limites des deux expressions quand t tend vers 0.

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{e^{1/t}}{t} = \lim_{x\to -\infty} xe^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\cos(t)-1}{t} = \cos'(0) = 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.