Analyse 1, Groupe A2 Le 29 mars 2013

Test n° 1

Exercice 1. Soit (u_n) une suite convergente. Montrer que la suite (v_n) définie par

$$v_n = (u_{n^{11}+2013} - u_{7n+42})\left(\sin\left(\frac{e^n + \ln 17}{n^\pi + 1}\right) + \cos(\arctan(\sqrt{n^3+n+1}))\right)$$

est convergente.

Exercice 2. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $f(x) - x$ est bornée sur $[0,+\infty[$. Déterminer la valeur de

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Corrigé 1. Les suites $(u_{n^{11}+2013})$ et (u_{7n+42}) sont des suites extraites de (u_n). Comme cette dernière converge, on en déduit qu'elles convergent également toutes les deux et ont même limite. Leur différence converge donc vers 0.

D'autre part, sachant que $|\sin(x)| \leq 1$ et $|\cos(x)| \leq 1$ pour tout réel x, on en déduit (via l'inégalité triangulaire) que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\sin\left(\frac{e^n + \ln 17}{n^\pi + 1}\right) + \cos(\arctan(\sqrt{n^3+n+1}))\right| \leq 2$$

Au final, la suite (v_n) est produit d'une suite convergeant vers 0 par une suite bornée. Elle converge donc vers 0.

Corrigé 2. Par hypothèse, il existe un réel M tel que :

$$\forall x \geq 0, \qquad |f(x) - x| \leq M$$

d'où

$$\forall x > 0, \qquad \left|\frac{f(x)}{x} - 1\right| \leq \frac{M}{x}$$

Quand on fait tendre x vers $+\infty$, $\frac{M}{x}$ tend vers 0, et $\frac{f(x)}{x}$ tend vers 1.