Université Bordeaux 1 Année 2008-2009
MHT 401

Devoir maison n° 1

(à rendre semaine 10 — du 2 au 6 mars)

Exercice 1
Soit $\alpha > 0$ un réel. On note I_α l'intégrale généralisée suivante :

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^\alpha}\, dt$$

1. Pour quelles valeurs de α l'intégrale I_α est-elle convergente ?
2. Calculer la valeur de I_1.
3. En intégrant par parties, montrer que $I_1 = 2(I_1 - I_2)$. En déduire la valeur de I_2.
4. Utiliser le changement de variable $t = \tan x$ pour calculer la valeur de $I_{3/2}$.

Exercice 2
On se propose d'étudier l'intégrale généralisée

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2 |\sin x|^{2/3}}\, dx$$

On notera que l'intégrande admet une infinité de pôles sur l'intervalle d'intégration.

1. Montrer que l'intégrale généralisée

$$K = \int_0^{\pi} \frac{1}{|\sin x|^{2/3}}\, dx$$

converge.

2. Montrer que l'on a, pour tout entier $n \geq 0$, la majoration

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{(1+x)^2 |\sin x|^{2/3}}\, dx \leq \frac{K}{(1+n\pi)^2}$$

En déduire que l'intégrale de gauche converge.

3. Montrer que la quantité

$$\int_0^{X} \frac{1}{(1+x)^2 |\sin x|^{2/3}}\, dx$$

tend vers une limite finie quand X tend vers $+\infty$.