

Test n° 1 — Durée : 20 mn

Exercice 1. Soit (u_n) une suite réelle.

- (1) On suppose que la suite (nu_n) converge vers 0. Que peut-on dire de (u_n) ?
(2) On suppose que la suite (nu_n) converge vers 1. Que peut-on dire de (u_n) ?
(Justifiez soigneusement chacune de vos réponses).

Exercice 2. La suite (u_n) à valeurs complexes définie par

$$u_n = \frac{\sin(n^2) + i \cos(n^3)}{n + i}$$

est-elle convergente? Le cas échéant, calculer sa limite.

Corrigé 1. (1) Si la suite (nu_n) converge vers 0 alors la suite

$$u_n = \frac{1}{n}(nu_n)$$

converge vers 0 comme produit de deux suites convergeant vers 0.

- (2) Même raisonnement que ci-dessus : le produit d'une suite convergeant vers 0 par une suite convergeant vers 1 converge vers 0.

Corrigé 2. Nous avons pour tout n , par l'inégalité triangulaire

$$|\sin(n^2) + i \cos(n^3)| \leq |\sin(n^2)| + |\cos(n^3)| \leq 2$$

et, d'autre part,

$$|n + i| \geq n$$

Nous avons donc, pour tout $n \neq 0$,

$$|u_n| \leq \frac{2}{n}$$

ce qui montre que (u_n) converge vers 0 (son module étant majoré par une suite qui tend vers 0).