Chapitre 5

Intégration

Nous allons construire l'intégrale par un procédé de passage à la limite. D'abord on définit l'intégrale des fonctions en escaliers, ensuite on passe à la limite pour intégrer des fonctions plus générales. Le point délicat est que le mode de convergence doit être uniforme.

5.1 Intégration des fonctions en escaliers

La notion de fonction en escaliers est assez intuitive. Nous allons la préciser.

Définition 5.1.1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

(1) Une subdivision σ de $[a, b]$ est la donnée d'une liste finie strictement croissante d'éléments de $[a, b]$

$$\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \text{avec} \quad x_0 < x_1 < \cdots < x_n$$

telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$.

(2) On dit qu'une subdivision σ' est plus fine qu'une subdivision σ si tous les éléments de la liste σ sont dans la liste σ'.

(3) On dit qu'une fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est en escaliers s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que φ soit constante sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ pour i parcourant $\{0, 1, \dots, n-1\}$. On dit qu'une telle subdivision σ est adaptée à φ.

Notons que, si φ est une fonction en escaliers et si σ est une subdivision adaptée à φ, alors toute subdivision plus fine que σ est elle aussi adaptée à φ.

Si φ et ψ sont deux fonctions en escaliers, et si λ et μ sont deux réels, alors $\lambda\varphi + \mu\psi$ est une fonction en escaliers, ainsi que le produit $\varphi\psi$ et la valeur absolue $|\varphi|$.

On définit l'intégrale d'une fonction en escaliers de façon évidente : c'est la somme des aires des rectangles délimités par l'axe des abscisses et la courbe de la fonction, les rectangles au-dessus de l'axe étant comptés positivement, ceux en dessous étant comptés négativement.

Définition 5.1.2. Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escaliers et $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée. Pour i parcourant $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, on note c_i la valeur de la fonction φ sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. On définit l'intégrale de φ sur l'intervalle $[a, b]$ comme étant la quantité

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) c_i$$

On vérifie que cette quantité ne dépend que de a, b et φ, et pas du choix de la subdivision σ. On définit aussi le symbole

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = -\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

(autrement dit, si l'on intègre « à reculons », on inverse le signe de l'intégrale). On définit enfin

$$\int_a^a \varphi(x)\,dx = 0$$

Exemple. L'intégrale d'une fonction constante

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

Voici les principales propriétés de l'intégrale.

Proposition 5.1.3. *Soient φ et ψ deux fonctions en escaliers sur un intervalle I, et soient $a, b \in I$.*

(1) *(linéarité). Si λ et μ sont deux réels, alors*

$$\int_a^b (\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x))\,dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)\,dx + \mu \int_a^b \psi(x)\,dx$$

(2) *(positivité). Si $a < b$ et si $\varphi(x) \geq 0$ pour $x \in [a, b]$, alors*

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \geq 0$$

(3) *(relation de Chasles). Pour tout $c \in I$, nous avons*

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^c \varphi(x)\,dx + \int_c^b \varphi(x)\,dx$$

Démonstration. (1) On peut supposer que $a < b$. Soit σ une subdivision adaptée à φ, et σ' une subdivision adaptée à ψ, alors la réunion $\sigma \cup \sigma'$ est une subdivision adaptée à φ, à ψ, et à $\lambda\varphi + \mu\psi$. Le résultat est alors évident. (2) Évident. (3) Évident dans le cas où $a \leq c \leq b$. Dans les autres cas, on s'y ramène en utilisant le fait que $\int_a^b = -\int_b^a$. □

Conséquences de la positivité.

Corollaire 5.1.4. (1) *Si φ et ψ sont deux fonctions en escaliers sur $[a, b]$ telles que $\varphi \leq \psi$, alors*

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx \leq \int_a^b \psi(x)\, dx$$

(2) *Si φ est une fonction en escaliers sur $[a, b]$, alors*

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |\psi(x)|\, dx$$

Démonstration. (1) En effet, $\psi - \varphi$ est une fonction en escaliers positive, donc par positivité et linéarité de l'intégrale nous avons

$$0 \leq \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^b \psi(x)\, dx$$

ce qu'on voulait. (2) Nous avons, pour tout $x \in [a, b]$

$$-|\varphi(x)| \leq \varphi(x) \leq |\varphi(x)|$$

donc, d'après le premier point

$$-\int_a^b |\varphi(x)|\, dx \leq \int_a^b \varphi(x)\, dx \leq \int_a^b |\varphi(x)|\, dx$$

On en déduit le résultat. □

Le point (2) est un analogue de l'inégalité triangulaire.

Remarque. L'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'intégrale est une forme linéaire sur cet espace.

5.2 Intégration des fonctions réglées

5.2.1 Fonctions réglées

Nous introduisons la notion de convergence simple et de convergence uniforme d'une suite de fonctions.

Définition 5.2.1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit (f_n) une suite de fonctions sur I, et soit f une fonction sur I.

(1) On dit que (f_n) converge simplement vers f si, pour tout $x \in I$, la suite $f_n(x)$ converge vers $f(x)$

(2) On dit que (f_n) converge uniformément vers f si

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Définition 5.2.2. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est réglée s'il existe une suite de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f.

Nous allons maintenant étudier une classe importante de fonctions : les fonctions continues par morceaux.

Définition 5.2.3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que, pour tout i, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ admet un prolongement continu à l'intervalle fermé $[x_i, x_{i+1}]$.

En d'autres termes, une telle fonction f est continue sur chacun des $]x_i, x_{i+1}[$ et admet une limite finie à droite et à gauche en chaque x_i, lesquelles limites peuvent être distinctes et distinctes de la valeur de f au point x_i lui-même.

Remarque. L'ensemble $\mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}([a, b])$ des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Cet espace contient deux sous-espaces naturels : l'espace $\mathcal{E}([a, b])$ des fonctions en escaliers, et l'espace $\mathcal{C}^0([a, b])$ des fonctions continues. En fait, on vérifie facilement que toute fonction continue par morceaux est somme d'une fonction continue et d'une fonction en escaliers, en d'autres termes :

$$\mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}([a, b]) = \mathcal{C}^0([a, b]) + \mathcal{E}([a, b])$$

Cette somme n'est pas directe, mais presque : l'intersection des deux sous-espaces est l'espace des fonctions constantes. Autrement dit, la décomposition est unique à une constante près.

Le résultat à retenir

Théorème 5.2.4. *Une fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé borné est réglée.*

Nous aurons besoin d'un résultat intermédiaire

Lemme 5.2.5. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.*

(i) Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une subdivision $\sigma_n = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ obtenue en découpant l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales. Plus explicitement :

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b - a) \qquad \textit{pour } k = 0, 1, \dots, n$$

On définit alors une fonction en escaliers φ_n sur $[a, b]$ en posant

$$\varphi_n(x) = f(x_k) \quad \textit{pour } x \in [x_k, x_{k+1}[$$

et $\varphi_n(b) = f(b)$.

(ii) La suite de fonctions (φ_n) ainsi définie converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, nous allons montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\sup_{x \in [a,b]} |\varphi_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a, b]$. Par conséquent, il existe un $\delta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$,

$$|x - y| \leq \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Choisissons un entier N tel que

$$\frac{1}{N}(b - a) \leq \delta_\varepsilon$$

Soit $n \geq N$. On considère la subdivision σ_n et la fonction φ_n définies dans l'énoncé. Étant donné $x \in [a, b[$, il existe k tel que $x \in [x_k, x_{k+1}[$, et alors

$$|x - x_k| \leq \frac{1}{n}(b - a) \leq \delta_\varepsilon$$

ceci implique, par continuité uniforme de f, que

$$|f(x) - f(x_k)| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \varepsilon$$

ce qu'on voulait. □

Démonstration du théorème. Sachant que toute fonction continue par morceaux est somme d'une fonction continue et d'une fonction en escaliers, il suffit de montrer le résultat pour une fonction continue, ce qui a été fait dans le lemme. □

5.2.2 Construction de l'intégrale

Nous allons à présent définir l'intégrale des fonctions réglées.

Proposition-définition 5.2.6. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réglée, et soit $\varphi_n)$ une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f. Alors la suite $(\int_a^b \varphi_n(x)\,dx)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. En outre, sa limite ne dépend que de a, b, et f, et pas du choix de (φ_n). On définit alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ comme étant la quantité*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

Enfin, on pose (comme pour les fonctions en escaliers)

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

et

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Démonstration. Nous devons d'abord montrer que la suite

$$(\int_a^b \varphi_n(x)\,dx)_{n\in\mathbb{N}}$$

est convergente. Pour cela, nous allons vérifier que c'est une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, alors, comme la suite (φ_n) converge uniformément vers f, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \sup_{y\in[a,b]} |\varphi_n(y) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Autrement dit,

$$\forall n \geq N, \forall x \in [a,b], |\varphi_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Maintenant, soient p et q deux entiers supérieurs à N. Nous pouvons écrire, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| \leq |\varphi_p(x) - f(x)| + |\varphi_q(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

D'après les propriétés de l'intégrale d'une fonction en escaliers, il vient alors

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \varphi_p(x)\,dx - \int_a^b \varphi_q(x)\,dx\right| &\leq \int_a^b |\varphi_p(x) - \varphi_q(x)|\,dx \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon\end{aligned}$$

ce qu'on voulait. Il reste à vérifier que la limite ne dépend pas du choix de la suite (φ_n). Soit (ψ_n) une autre suite de fonctions en escaliers qui converge vers f. Alors nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned}|\varphi_n(x) - \psi_n(x)| &\leq |\varphi_n(x) - f(x)| + |\psi_n(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_{y\in[a,b]} |\varphi_n(y) - f(y)| + \sup_{y\in[a,b]} |\psi_n(y) - f(y)|\end{aligned}$$

Il vient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx - \int_a^b \psi_n(x)\,dx\right| &\leq \int_a^b |\varphi_n(x) - \psi_n(x)|\,dx \\ &\leq (b-a)\big(\sup_{y\in[a,b]} |\varphi_n(y) - f(y)| + \sup_{y\in[a,b]} |\psi_n(y) - f(y)|\big)\end{aligned}$$

et la quantité à droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx$$

ce qu'on voulait. □

Notons que, dans les deux étapes de la démonstration, on s'est servi de l'uniformité de la convergence.

Proposition 5.2.7. *L'intégrale des fonctions réglées est linéaire, positive, et satisfait la relation de Chasles.*

Démonstration. Il suffit de passer à la limite les propriétés des l'intégrale des fonctions en escaliers. Pour la positivité, on utilise aussi le fait qu'une fonction à valeurs positives est limite uniforme de fonctions en escaliers à valeurs positives. □

On en déduit le même corollaire que pour les fonctions en escaliers : si f est une fonction réglée, alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

5.3 Intégrale et primitives

5.3.1 Théorème de la moyenne

Théorème 5.3.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$$

Démonstration. La fonction f étant continue, il existe (d'après le théorème des bornes et celui des valeurs intermédiaires) des réels m et M tels que

$$f([a,b]) = [m,M]$$

En particulier, nous avons

$$\forall x \in [a,b], \quad m \leq f(x) \leq M$$

En intégrant ces inégalités, on trouve que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

d'où

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Mais alors, comme $[m,M]$ est l'image de $[a,b]$ par f, il existe $c \in [a,b]$ tel que l'on ait

$$\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

d'où le résultat. □

Tout ceci a le même parfum que le théorème des accroissements finis.

5.3.2 Théorème fondamental de l'analyse

On fixe un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 5.3.2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Une primitive de f sur I est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $F' = f$. Si elle existe, une telle fonction F est unique à une constante additive près.

L'unicité à une constante près s'exprime ainsi : si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I, alors la fonction $F_1 - F_2$ est constante. En effet, $(F_1 - F_2)' = 0$, donc $F_1 - F_2$ est constante d'après le chapitre 3.

On peut poser la question suivante : quelles sont les fonctions qui admettent des primitives ?

Le principal résultat (attribué à Newton) est le suivant

Théorème 5.3.3 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $a \in I$. Alors la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est une primitive de f sur I. Plus précisément, c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$, nous allons montrer que F est dérivable en x_0. Soit $h \neq 0$, alors nous avons, d'après la relation de Chasles

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

D'après le théorème de la moyenne, il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = hf(x_0 + \theta h)$$

d'où

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0 + \theta h)$$

La fonction f étant continue, cette quantité tend vers $f(x_0)$ quand h tend vers 0. □

Ce résultat permet de définir de nouvelles fonctions. Par exemple, la fonction log (logarithme népérien) est définie (pour $x > 0$) par la formule

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Notons aussi que le théorème fondamental ne s'applique pas aux fonctions discontinues. Ainsi, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux est intégrable mais elle n'admet pas toujours une primitive. Plus précisément, la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est continue sur I, mais n'est en général pas dérivable en un point de discontinuité de f.

Corollaire 5.3.4. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f admet des primitives. En outre, si F est une primitive de f alors, pour tous $a, b \in I$ on a*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

On adopte la notation usuelle

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ainsi l'intégrale permet de montrer, de façon théorique, l'existence de primitives. Inversement, si l'on a explicitement trouvé une primitive, on peut en déduire la valeur numérique d'une intégrale.

Démonstration. Soit $c \in I$. D'après ce qui précède, la fonction

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

est une primitive de f sur I. Soient maintenant $a, b \in I$. D'après la relation de Chasles, nous avons :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F_c(b) - F_c(a)$$

Soit F une autre primitive de f sur I, alors $F_c - F$ est une fonction constante sur I, donc

$$F_c(b) - F_c(a) = F(b) - F(a)$$

d'où le résultat. □

5.3.3 Application au calcul de limites de certaines suites

Proposition 5.3.5. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Démonstration. Soit (φ_n) la suite de fonctions en escaliers définie dans le lemme 5.2.5. Comme (φ_n) converge uniformément vers f nous avons, par définition de l'intégrale,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

D'autre part

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

d'où le résultat en retirant le premier terme et en rajoutant le dernier dans la somme. □

Par exemple, la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$$

converge vers

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

5.4 Calcul pratique d'intégrales

Deux astuces (bien connues) permettent parfois de simplifier le calcul d'intégrales.

Théorème 5.4.1 (Intégration par parties)**.** *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Alors, pour tous $a, b \in I$ on a*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Démonstration. La fonction fg est de classe $\mathcal{C}^1$, donc

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx + \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

(dérivation d'un produit, puis théorème fondamental de l'analyse). $\square$

Exemple.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\,dx &= [x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)\,dx \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + [\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Théorème 5.4.2 (Changement de variable)**.** *Soient I et J deux intervalles ouverts, et $\varphi : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $f : J \to \mathbb{R}$ continue. Alors, pour tous $a, b \in I$ on a*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

Démonstration. La fonction f étant continue, elle admet une primitive F sur J. La fonction $F \circ \varphi$ est alors dérivable, comme composée de deux fonctions dérivables, et

$$(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi) \times \varphi'$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= [F \circ \varphi]_a^b \\ &= [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx\end{aligned}$$

ce qu'on voulait. $\square$

Exemple. Calcul de l'aire A d'un quart de cercle de rayon 1.

$$A = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

On pose $x = \sin(t)$ (c'est-à-dire que l'on considère la fonction $\varphi(t) = \sin(t)$). Alors $dx = \cos(t)\, dt$. De plus, quand $t = 0$, $x = 0$ et quand $t = \frac{\pi}{2}$, $x = 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} A = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin(t)^2} \cos(t)\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2\, dt \end{aligned}$$

(on s'est servi du fait que $\cos(t)$ est positif sur l'intervalle considéré). On se souvient alors de la formule de linéarisation du carré pour la fonction cosinus :

$$\cos(t)^2 = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

d'où

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\, dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$