Chapitre 4

Formules de Taylor

La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor qui l'établit en 1715, permet l'approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point. La première étape est la formule

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

qui montre que, si f est dérivable, alors f est approchée par un polynôme de degré 1 (une droite). Comment faire pour augmenter le degré ?

4.1 Les trois formules de Taylor

Notations 4.1.1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On fixe un entier naturel n.

On dit qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si elle est n fois dérivable sur I, et si sa dérivée n-ième est continue sur I.

Théorème 4.1.2 (Taylor-Young)**.** *Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I on peut écrire*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\varepsilon(h) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + h^n\varepsilon(h) \end{aligned}$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

Définition 4.1.3. La somme
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$
s'appelle le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0. Par convention, $0! = 1! = 1$.

Remarque. Une autre façon d'écrire un développement de Taylor au point x_0 consiste à poser $x = x_0 + h$. Le théorème de Taylor-Young s'énonce alors de la façon suivante : si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors pour tout $x \in I$ on peut écrire
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0)$$
où $\varepsilon(x-x_0)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0.

Exemples. a) La formule de Taylor-Young pour la fonction $\sin(x)$ à l'ordre $2n+1$ en 0 s'écrit
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$
En effet, on doit calculer les dérivées successives de $\sin(x)$ en 0. Nous avons
$$\sin(0) = 0, \sin'(0) = \cos(0) = 1, \sin''(0) = -\sin(0) = 0, \ldots$$
Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons
$$\sin^{(2k)}(0) = 0 \text{ et } \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$$
d'où le résultat.

b) La formule de Taylor-Young pour la fonction e^x à l'ordre n en 0 s'écrit
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$
En effet, e^x est sa propre dérivée.

Par exemple, pour x suffisamment petit, le polynôme $x - \frac{x^3}{3!}$ donne une valeur approchée de $\sin(x)$. On aimerait connaître la précision de cette approximation, c'est-à-dire contrôler la taille du reste $x^3\varepsilon(x)$.

Nous allons d'abord exprimer le reste sous la forme de Lagrange, ce qui constitue une généralisation du théorème des accroissements finis.

Théorème 4.1.4 (Taylor-Lagrange)**.** *Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que l'on ait*
$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)$$
(notons ici que θ dépend de h).

Exemples. a) Considérons à nouveau la fonction $\sin(x)$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 au voisinage de 0 s'écrit

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\cos(\theta x)$$

avec $\theta \in]0, 1[$. Ainsi, on peut dire que $x - \frac{x^3}{3!}$ constitue une valeur approchée de $\sin(x)$ avec une erreur inférieure ou égale à $\frac{x^4}{4!}$.

b) Considérons encore $x \mapsto e^x$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 au voisinage de 0 s'écrit

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}e^{\theta x}$$

Comme la fonction e^x est croissante, on peut dire que $e^{\theta x} \leq e^x$. Ceci permet par exemple de donner une valeur approchée de e. En effet, nous avons

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}e^{\theta}$$

avec $e^{\theta} < e < 3$ donc, l'erreur est de l'ordre de $\frac{3}{120} = \frac{1}{40}$.

c) Soit P un polynôme de degré au plus n. Alors P est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $P^{(n+1)} = 0$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n au voisinage de 0 nous dit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}P^{(k)}(0)$$

En effet, le reste est nul ! Ainsi, les coefficients de P sont donnés par les dérivées successives de P en 0. Ce résultat peut aussi se démontrer par un calcul algébrique (sans recourir à l'analyse).

Démonstration de la formule de Taylor-Lagrange. Si $h = 0$, c'est vrai. Fixons $h \neq 0$, pour simplifier les notations, nous posons $x = x_0 + h$. Nous cherchons donc à montrer l'existence d'un réel c strictement compris entre x_0 et x tel que l'on ait

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

On introduit la fonction g définie par

$$g(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - t)^k}{k!}f^{(k)}(t) - K(x - t)^{n+1}$$

où K est un réel choisi de telle façon que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + K(x - x_0)^{n+1}$$

Il est clair, vu la définition de g, que $g(x) = 0$. Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que K est de la forme $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ pour un certain c.

Vu les hypothèses, nous pouvons appliquer le théorème de Rolle pour trouver c (strictement compris entre x_0 et x) tel que $g'(c) = 0$.

Calculons g'. Par la formule de dérivation d'un produit, nous avons

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(x-t)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) \\ &+ K(n+1)(x-t)^n \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(x-t)^l}{l!} f^{(l+1)}(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) \\ &+ K(n+1)(x-t)^n \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + K(n+1)(x-t)^n \\ &= (x-t)^n \left(-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} + K(n+1) \right) \end{aligned}$$

L'égalité $g'(c) = 0$ se traduit donc par :

$$K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

d'où le résultat. □

Démonstration de la formule de Taylor-Young. On applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$ pour la fonction f. Il existe donc $\theta \in]0,1[$ tel que l'on ait

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h)$$

On pose alors

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{n!} \left(f^{(n)}(x_0 + \theta h) - f^{(n)}(x_0) \right)$$

Le nombre θ, bien que dépendant de h, appartient à $]0,1[$. Nous avons donc

$$\lim_{h \to 0} (x_0 + \theta h) = x_0$$

Comme $f^{(n)}$ est continue en x_0, on en déduit que

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Enfin, par définition même de ε, nous avons

$$\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

d'où le résultat, en injectant ceci dans la formule de départ. □

Il existe aussi une autre expression du reste, qui constitue une généralisation du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (voir le chapitre suivant).

Théorème 4.1.5 (Taylor avec reste intégral)**.** *Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I on a*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th) \, \mathrm{d}t$$

Remarque. Le reste intégral admet une autre expression. Plus précisément, on a l'égalité

$$\frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + th) \, \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t$$

qui découle tout simplement d'un changement de variable $t \mapsto x_0 + th$.

Remarque. Pour certaines fonctions f, nous pouvons montrer que le reste tend vers zéro quand n tend vers l'infini ; ces fonctions peuvent être développées en *série de Taylor* dans un voisinage du point x_0 et sont appelées des *fonction analytiques*.

4.2 Opérations sur les polynômes de Taylor

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. Comment obtenir le polynôme de Taylor de $f + g$, de fg, de $\frac{f}{g}$, et cætera, à partir de ceux de f et g ?

Commençons par démontrer l'unicité du polynôme de Taylor d'une fonction donnée en un point donné.

Lemme 4.2.1. *Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et soit $x_0 \in I$. Supposons qu'il existe un polynôme P de degré au plus n et une fonction ε qui tend vers 0 en 0, tels que l'on ait*

$$f(x_0 + h) = P(h) + h^n \varepsilon(h)$$

pour tout h tel que $x_0 + h \in I$. Alors P est le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0.

Démonstration. Comme f est de classe $\mathcal{C}^n$, et que P est un polynôme, la fonction $h \mapsto h^n\varepsilon(h)$ est également de classe $\mathcal{C}^n$. De plus, les n premières dérivées de $h \mapsto h^n\varepsilon(h)$ s'annulent en 0. On peut donc écrire, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$f^{(k)}(x_0) = P^{(k)}(0)$$

D'autre part, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n en 0 pour le polynôme P nous dit que, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$P(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} P^{(k)}(0)$$

(le reste étant nul comme on l'a vu plus haut). Ainsi

$$P(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

ce qu'on voulait. □

Voici comment les opérations algébriques usuelles se traduisent au niveau des polynômes de Taylor.

Théorème 4.2.2. *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et soit $x_0 \in I$. Soit P (resp. Q) le polynôme de Taylor de f (resp. g) à l'ordre n au point x_0. Alors*

(1) *le polynôme de Taylor de $f + g$ à l'ordre n en x_0 est $P + Q$*

(2) *le polynôme de Taylor de fg à l'ordre n en x_0 est PQ tronqué en degré n*

(3) *si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0 et le polynôme de Taylor de $\frac{f}{g}$ est le quotient de P par Q selon les puissances croissantes à l'ordre n.*

Quelques commentaires :

1) PQ est un polynôme de degré au plus $2n$, son *tronqué en degré n* est le polynôme obtenu en supprimant tous les termes de degré strictement supérieur à n. Dans la pratique, ce ne sera même pas la peine de calculer ces termes...

2) La *division selon les puissances croissantes* de P par Q à l'ordre n est définie comme suit : si $Q(0) \neq 0$, alors il existe un unique couple (A, B) de polynômes tel que l'on ait

$$P(X) = Q(X)A(X) + X^{n+1}B(X) \quad \text{avec} \quad \deg(A) \leq n$$

On dit que A est le quotient de P par Q selon les puissances croissantes à l'ordre n, et que B est le reste.

Cette division, contrairement à la division euclidienne des polynômes (que l'on appelle aussi division selon les puissances décroissantes), a pour effet d'augmenter le degré du reste, au lieu de le diminuer. Ainsi, il n'y a pas une seule division selon les puissances croissantes, il y en a une pour chaque ordre n. Plus n augmente, plus le degré du quotient et du reste augmentent.

Exemples. On écrit Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour $\sin(x)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$$

et pour $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)$$

d'où l'on déduit :

a) Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour la différence

$$\sin(x) - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$$

b) Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour le produit

$$\begin{aligned}\sin(x)\ln(1+x) &= (x - \frac{x^3}{6})(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) + x^3\varepsilon(x)\\ &= x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Démonstration. D'après Taylor-Young, il existe des fonction ε_1 et ε_2 qui tendent vers 0 en 0 telles que, pour tout h tel que $x_0 + h \in I$,

$$f(x_0 + h) = P(h) + h^n\varepsilon_1(h)$$

et

$$g(x_0 + h) = Q(h) + h^n\varepsilon_2(h)$$

En additionnant ces deux expressions, et en appliquant le lemme, le point (1) en découle.
(2) Nous avons

$$\begin{aligned}(fg)(x_0 + h) &= (P(h) + h^n\varepsilon_1(h))(Q(h) + h^n\varepsilon_2(h))\\ &= P(h)Q(h) + h^n(P(h)\varepsilon_2(h) + \varepsilon_1(h)Q(h) + h^n\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h))\\ &= P(h)Q(h) + h^n\varepsilon_3(h)\end{aligned}$$

où $\varepsilon_3(h)$ est une fonction qui tend vers 0 en 0. Il suffit alors d'écrire

$$P(h)Q(h) = T_n(PQ)(h) + h^n\varepsilon_4(h)$$

où $T_n(PQ)(h)$ est le tronqué de PQ en degré n. Ainsi

$$(fg)(x_0 + h) = T_n(PQ)(h) + h^n(hR(h) + \varepsilon_3(h))$$

d'où le résultat (via le lemme). (3) Soit

$$P(X) = Q(X)A(X) + X^{n+1}B(X) \quad \text{avec} \quad \deg(A) \leq n$$

le résultat de la division de P par Q selon les puissances croissantes à l'ordre n. Nous avons alors, pour tout h,

$$P(h) - Q(h)A(h) = h^{n+1}B(h)$$

d'où

$$\begin{aligned} f(x_0+h) - g(x_0+h)A(h) &= (P(h) + h^n\varepsilon_1(h)) - (Q(h) + h^n\varepsilon_2(h))A(h) \\ &= P(h) - Q(h)A(h) + h^n(\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h)A(h)) \\ &= h^{n+1}B(h) + h^n(...) \\ &= h^n\varepsilon_3(h) \end{aligned}$$

Ainsi, en divisant tout par $g(x_0+h)$, nous obtenons

$$\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - A(h) = h^n \frac{\varepsilon_3(h)}{g(x_0+h)}$$

Quand h tend vers 0, $g(x_0+h)$ tend vers $g(x_0) \neq 0$, donc la fonction $\frac{\varepsilon_3(h)}{g(x_0+h)}$ tend vers 0. D'où le résultat. □

On peut aussi composer les polynômes de Taylor.

Théorème 4.2.3. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ telles que $f(I) \subseteq J$, et soit $x_0 \in I$. Soit P le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0, et soit Q le polynôme de Taylor de g à l'ordre n au point $f(x_0)$. Alors le polynôme de Taylor de $g \circ f$ à l'ordre n au point x_0 est le polynôme composé $Q \circ P$ tronqué en degré n.*

Démonstration. Même principe que précédemment. □

Remarque. a) Si une fonction est paire (resp. impaire), alors son polynôme de Taylor d'ordre n en 0 ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de x.

b) On peut dériver (ou intégrer) les polynômes de Taylor. Plus précisément, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$, et le polynôme de Taylor de f' à l'ordre $n-1$ au point x_0 s'obtient en dérivant le polynôme de Taylor de f à l'ordre n en ce même point.

Citons quelques applications des formules de Taylor :

- Calcul de valeurs approchées de fonctions usuelles
- Calcul de limites
- Position du graphe d'une courbe par rapport à sa tangente

Exemple. Le dessin ci-dessous compare graphiquement la fonction $\sin(x)$ avec ses polynômes de Taylor d'ordres 3, 5 et 7 en 0.