Chapitre 1

Suites réelles et complexes

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Pour $x \in \mathbb{K}$, nous noterons $|x|$ le module de x (égal à la valeur absolue de x dans le cas réel).

Nous appellerons *distance* entre deux éléments x et y de $\mathbb{K}$ le réel $|x - y|$.

1.1 Généralités

Définition 1.1.1. (1) Une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. La donnée d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivaut à la donnée de l'application

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad n \longmapsto u_n$$

(2) Une sous-suite (ou suite extraite) d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ où les n_k sont des entiers tels que

$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par l'application $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, alors $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est donnée par l'application $\theta \circ \varphi$, où φ est définie par $\varphi(k) = n_k$.

Une suite peut être définie de plusieurs façons :

- Par une formule explicite : $u_n = 2^n n^2$
- Par une récurrence : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$
- Abstraitement : u_n est le n-ième nombre premier.

Il arrive que les premiers termes d'une suite ne soient pas définis. Par exemple, dans la suite

$$u_n = \sqrt{n-2}$$

les termes u_0 et u_1 ne sont pas définis. On notera $(u_n)_{n\geq 2}$ cette suite.

Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a deux suites extraites importantes : la suite $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ des termes pairs, et la suite $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ des termes impairs.

Exemple. La suite de Syracuse d'un nombre entier N est définie par récurrence, de la manière suivante : $u_0 = N$ et pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

Lothar Collatz a conjecturé (en 1937) que, pour tout $N > 0$, il existe un indice n tel que $u_n = 1$. Une fois que le nombre 1 est atteint, la suite des valeurs $1, 4, 2, 1, 4, 2$ se répète indéfiniment. La conjecture reste ouverte aujourd'hui (2011). Elle a été vérifiée par ordinateur pour $N < 2^{62}$.

1.2 Convergence d'une suite réelle ou complexe

La définition moderne de la limite, encore utilisée aujourd'hui, est donnée indépendamment par Bolzano en 1816, et par Cauchy en 1821 dans son *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique.*

Définition 1.2.1. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ *converge* vers $\ell \in \mathbb{K}$ si :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

ou, avec des quantificateurs,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On dit qu'une suite *diverge* si elle ne converge pas.

Ceci se traduit de la façon suivante : pour tout $\varepsilon > 0$ (arbitrairement petit), il existe un rang (l'entier N) à partir duquel tous les termes de la suite sont à une distance inférieure à ε de ℓ. Insistons sur le fait que N dépend de ε !

Exemples. a) Montrons que la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$, on cherche un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|\frac{1}{n}| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. On constate que, si l'on pose $N = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$, alors $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ et donc, pour tout $n \geq N$, on a bien $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Ainsi, pour montrer que (u_n) converge vers ℓ à partir de la définition, on fixe $\varepsilon > 0$ et on cherche à traduire la condition $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ en une condition de la forme $n \geq N_\varepsilon$, l'entier N_ε étant construit au cours du raisonnement.

b) Problème concret : comment calculer π ? Plus précisément, comment calculer des valeurs approchées de π avec une précision arbitraire ? Comme π est irrationnel, son écriture décimale n'est ni finie, ni périodique. Une méthode naturelle est de construire une suite (u_n) dont on sait calculer les termes et qui converge vers π. Alors, par définition de la convergence, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_ε à partir duquel u_n est une valeur approchée de π à ε près. Si N_ε est explicite en fonction de ε, alors on sait calculer une valeur approchée de π avec une précision arbitraire.

Pour exprimer le fait que (u_n) converge vers ℓ, nous dirons que ℓ est la *limite* de (u_n) quand n tend vers $+\infty$, et nous noterons

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad \lim u_n = \ell \quad \text{ou encore} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Pour que cette notation ait un sens, il faut montrer qu'une suite convergente admet une unique limite !

Proposition 1.2.2. *Si une suite converge, sa limite est unique.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergeant vers deux limites ℓ et ℓ'. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, comme (u_n) converge vers ℓ

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

et, comme (u_n) converge vers ℓ',

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |u_n - \ell'| \leq \varepsilon$$

Alors, pour $n \geq \mathrm{Max}(N_1, N_2)$, nous avons

$$|\ell - \ell'| = |(\ell - u_n) + (u_n - \ell')| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| \leq 2\varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout ε, on en déduit que $|\ell - \ell'| = 0$, donc que $\ell = \ell'$.

(Nous avons utilisé le fait (trivial) suivant : si un réel positif est plus petit que toute quantité strictement positive, alors il est nul.) □

Nous avons clairement les équivalences :

$$\lim u_n = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \lim(u_n - \ell) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim |u_n - \ell| = 0$$

Si (u_n) converge, que peut-on dire des suites extraites de (u_n) ?

Proposition 1.2.3. *Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente, de limite ℓ. Soit (u_{n_k}) une suite extraite de (u_n). Comme la suite n_k est une suite strictement croissante d'entiers, nous avons $n_k \geq k$ pour tout k. Soit $\varepsilon > 0$, alors, comme (u_n) converge vers ℓ, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Mais alors, pour tout $k \geq N$, nous avons $n_k \geq k \geq N$ et par conséquent $|u_{n_k} - \ell| \leq \varepsilon$, d'où le résultat. □

Ceci fournit des critères de divergence :

- si on peut extraire de (u_n) une suite divergente, alors (u_n) diverge
- si on peut extraire de (u_n) deux suites convergeant vers des limites différentes, alors (u_n) diverge

Par exemple, la suite $u_n = (-1)^n$ diverge : la suite des termes pairs converge vers 1, la suite des termes impairs converge vers -1.

Remarquons aussi que la modification d'un nombre fini de termes n'a aucune incidence sur la convergence d'une suite.

Définition 1.2.4. On dit qu'une suite (u_n) est *bornée* s'il existe un réel $B > 0$ tel que l'on ait

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq B$$

La proposition suivante fournit un autre critère de divergence.

Proposition 1.2.5. *Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente, de limite ℓ. D'après la définition de la limite, et en fixant $\varepsilon = 1$, on trouve qu'il existe un entier N_1 tel que, pour tout $n \geq N_1$, on ait

$$|u_n - \ell| \leq 1$$

d'où, pour tout $n \geq N_1$,

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \leq |\ell| + 1$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq \mathrm{Max}(|\ell| + 1, |u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N_1-1}|)$$

ainsi la suite (u_n) est bornée. Pour voir que la réciproque est fausse, il suffit de considérer la suite $u_n = (-1)^n$, qui est bornée mais divergente. $\square$

1.3 Opérations sur les limites

Nous allons montrer que le passage à la limite est compatible avec les lois du corps $\mathbb{K}$. Commençons par énoncer un lemme.

Lemme 1.3.1. *Le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers* 0 *tend vers* 0.

Démonstration. Soit (u_n) une suite bornée, alors il existe un réel $B > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq B$$

Soit (v_n) une suite tendant vers 0, montrons que $(u_n v_n)$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$, alors en considérant le réel $\frac{\varepsilon}{B}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|v_n| \leq \frac{\varepsilon}{B}$. Nous avons donc, pour tout $n \geq N$

$$|u_n v_n| \leq B|v_n| \leq \varepsilon$$

d'où le résultat. □

Théorème 1.3.2. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ'. Alors*

(1) *La suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$*

(2) *La suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$*

(3) *Supposons $\ell \neq 0$. Alors la suite $(\frac{1}{u_n})$ est bien définie à partir d'un certain rang, et converge vers $\frac{1}{\ell}$.*

Démonstration. (1) Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) converge vers ℓ, nous avons

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et, comme (v_n) converge vers ℓ',

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $N = Max(N_1, N_2)$. Alors, pour $n \geq N$, nous avons

$$|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où, par l'inégalité triangulaire

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \varepsilon$$

ce qui montre que $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.

(2) On peut écrire

$$u_n v_n - \ell\ell' = u_n(v_n - \ell') + (u_n - \ell)\ell'$$

La suite u_n étant convergente, elle est bornée (proposition 1.2.5). Comme $(v_n - \ell')$ tend vers 0, le lemme 1.3.1 nous dit que le produit $u_n(v_n - \ell')$ converge vers 0. De même, le produit $(u_n - \ell)\ell'$ converge vers 0. Ceci montre, d'après (1), que $u_n v_n - \ell\ell'$ converge vers 0, ce qu'on voulait. (3) Non démontré. □

Proposition 1.3.3. *Soit (z_n) une suite complexe. Alors (z_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si les suites réelles* $\text{Re}(z_n)$ *et* $\text{Im}(z_n)$ *convergent respectivement vers* $\text{Re}(\ell)$ *et* $\text{Im}(\ell)$.

Démonstration. La démonstration repose sur le fait suivant : soit $z = a + ib$ un nombre complexe, alors

$$\mathrm{Max}(|a|, |b|) \leq |z| \leq |a| + |b|$$

l'inégalité de droite découle de l'inégalité triangulaire, celle de gauche découle de l'écriture $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Posons $a_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(z_n)$, alors $\mathrm{Re}(z_n - \ell) = a_n - \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(z_n - \ell) = b_n - \mathrm{Im}(\ell)$. Soit $\varepsilon > 0$. Si $|z_n - \ell|$ est inférieur à ε, alors, par l'inégalité de gauche, il en est de même pour $|a_n - \mathrm{Re}(\ell)|$ et pour $|b_n - \mathrm{Im}(\ell)|$. Réciproquement, si $|a_n - \mathrm{Re}(\ell)|$ et $|b_n - \mathrm{Im}(\ell)|$ sont inférieurs à $\varepsilon/2$, alors par l'inégalité de droite $|z_n - \ell|$ est inférieur à ε. D'où le résultat. $\square$

Par exemple, la suite complexe

$$z_n = \frac{1}{n+1} + i\left(\frac{2n+4}{n+3}\right)$$

converge vers $2i$. Cependant, il n'est pas toujours commode de se ramener aux parties réelles et imaginaires : par exemple pour étudier la suite (q^n) où $q \in \mathbb{C}$.

1.4 Suites réelles

1.4.1 Passage à la limite et inégalités

Théorème 1.4.1. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

Alors

$$\lim u_n \leq \lim v_n$$

Démonstration. Par l'absurde : supposons que $\lim u_n > \lim v_n$. Alors la limite de la suite $(u_n - v_n)$ est strictement positive, notons-la ℓ. En prenant $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, on trouve que, pour n suffisamment grand, $u_n - v_n$ appartient à $[\ell - \frac{\ell}{2}, \ell + \frac{\ell}{2}] = [\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}]$, donc est positif. Ceci contredit l'hypothèse. D'où le résultat. $\square$

Attention : les inégalités strictes ne passent pas à la limite. Par exemple, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$ et pourtant $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Théorème 1.4.2 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que :*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$

(ii) *(u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ.*

Alors (v_n) converge vers ℓ.

Démonstration. Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq w_n - v_n \leq w_n - u_n$$

Comme (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite, la suite $(w_n - u_n)$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$0 \leq w_n - v_n \leq w_n - u_n \leq \varepsilon$$

ce qui montre que $(w_n - v_n)$ tend vers 0. Comme w_n converge vers ℓ, on en déduit que $v_n = w_n - (w_n - v_n)$ converge vers ℓ. Ce qu'on voulait. $\square$

Par exemple, l'encadrement

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

permet de montrer que la suite $(\frac{\sin(n)}{n})$ tend vers 0.

Ce résultat s'applique aux suites complexes : soient (u_n) une suite complexe et (v_n) une suite réelle, satisfaisant

1) $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq v_n$
2) $\lim v_n = 0$

Alors la suite (u_n) tend vers 0. Par exemple, la suite

$$z_n = \frac{e^{in\pi/3} + e^{in\pi/4}}{n}$$

tend vers 0, car son module est majoré par $\frac{2}{n}$.

Exemple. Voici un exemple de calcul de limite, résumant l'ensemble des techniques que nous avons vues jusqu'ici. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$u_n = \frac{2n + \cos(n)}{ni + \sqrt{(n+1)(n+2)}}$$

En divisant numérateur et dénominateur par n on trouve

$$u_n = \frac{2 + \frac{\cos(n)}{n}}{i + \sqrt{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n})}}$$

les suites $(\frac{\cos(n)}{n})$, $(\frac{1}{n})$ et $(\frac{2}{n})$ convergent vers 0. De plus, nous avons

$$1 \leq \sqrt{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n})} \leq (1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n})$$

donc le terme central converge vers 1 par le théorème des gendarmes. Ainsi, la suite (u_n) converge vers $\frac{2}{i+1}$.

1.4.2 Suites tendant vers l'infini

Définition 1.4.3. Soit (u_n) une suite réelle.

(1) On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si :

pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $u_n \geq A$

ou, avec des quantificateurs,

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$$

(2) On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si $(-u_n)$ tend vers $+\infty$.

Une suite qui tend vers l'infini est divergente. Dans certains livres, on trouve même l'expression « (u_n) diverge vers $+\infty$ ».

On introduit l'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

que l'on appelle la droite réelle achevée. On note aussi

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$$

ce qui suggère que $\overline{\mathbb{R}}$ se comporte comme un intervalle fermé.

Définition 1.4.4. On définit les opérations algébriques suivantes dans l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$.

a) $\forall \ell \in \mathbb{R}$, $\ell + \infty = +\infty$ et $\ell - \infty = -\infty$.

b) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

c) $\forall \ell \in \mathbb{R}^*$, $\ell.(\pm\infty) = \text{signe}(\ell).(\pm 1).\infty$

d) $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$, $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$

e) $\frac{1}{\pm\infty} = 0$

Théorème 1.4.5. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles admettant des limites (éventuellement infinies). Alors, chaque fois que les quantités ci-dessous sont bien définies, on peut écrire*

(1) $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$

(2) $\lim(u_n v_n) = \lim u_n \times \lim v_n$

(3) $\lim \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\lim u_n}$

Rappel : une suite réelle (u_n) est

- croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$
- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$
- monotone si elle est croissante ou décroissante

Proposition 1.4.6. *Soit (u_n) une suite réelle croissante.*

- *Si (u_n) est majorée, elle converge (vers sa borne supérieure)*
- *Sinon, (u_n) tend vers $+\infty$*

Démonstration. Supposons (u_n) majorée. Soit M la borne supérieure (le plus petit des majorants) de l'ensemble des termes de la suite (u_n). Soit $\varepsilon > 0$, alors $M-\varepsilon$ est strictement inférieur à M, donc n'est pas un majorant de (u_n). Il existe donc un entier N tel que

$$M - \varepsilon < u_N \leq M$$

La suite (u_n) étant croissante, on en déduit que, pour tout $n \geq N$,

$$M - \varepsilon < u_n \leq M$$

Il en résulte que, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - M| < \varepsilon$$

donc (u_n) converge vers M. Un raisonnement analogue prouve que, si (u_n) n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$. □

On a une proposition analogue pour les suites décroissantes. On en déduit :

Théorème 1.4.7 (Limite monotone)**.** *Toute suite réelle monotone a une limite, finie ou infinie.*

Théorème 1.4.8 (Suites adjacentes)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :*

- *(u_n) est croissante*
- *(v_n) est décroissante*
- *$(v_n - u_n)$ converge vers 0*

Alors (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et converge vers 0, donc est à termes positifs. Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$$

Ainsi, (u_n) est croissante majorée par v_0, donc converge vers une limite finie. De même, (v_n) est décroissante minorée par u_0, donc converge. Ainsi u_n et v_n convergent, et ont même limite puisque $(v_n - u_n)$ converge vers 0. □

1.4.3 Exemples

Limite d'une suite géométrique.

Lemme 1.4.9. *Soit $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 1$. Si la suite (q^n) converge, sa limite est* 0.

Démonstration. Supposons en effet que (q^n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Comme (q^{n+1}) est une suite extraite de (q^n), nous avons

$$\lim q^{n+1} = \lim q^n$$

et d'autre part,

$$\lim q^{n+1} = q \lim q^n$$

donc $\ell = q\ell$, d'où $\ell(q-1) = 0$, d'où $\ell = 0$ puisque $q \neq 1$. □

Suites géométriques réelles.

Proposition 1.4.10. *Soit r un nombre réel.*

(1) *si $|r| < 1$, la suite (r^n) converge vers* 0

(2) *si $r > 1$, la suite (r^n) tend vers* $+\infty$

Démonstration. (1) Quitte à remplacer r par $|r|$, on peut supposer que $r \in [0, 1[$. Alors la suite (r^n) est strictement décroissante, minorée par 0. Elle converge donc vers un réel, nécéssairement égal à 0 d'après le lemme. (2) Pour $r > 1$, la suite (r^n) est strictement croissante, donc admet une limite. Si cette limite était finie, elle serait nulle d'après ce qui précède. Or c'est impossible, puisque tous les termes de cette suite sont strictement supérieurs à 1. Donc (r^n) tend vers $+\infty$. □

Suites géométriques complexes.

Proposition 1.4.11. *Soit q un nombre complexe.*

(1) *si $|q| < 1$, la suite (q^n) converge vers* 0

(2) *si $|q| > 1$, la suite (q^n) diverge*

(3) *si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, la suite (q^n) diverge*

Démonstration. Les points (1) et (2) découlent de la proposition précédente. Le point (3) découle du lemme. □

Exemples. a) La suite $(i+4)^n$ diverge, car $|i+4| = \sqrt{17} > 1$.

b) La suite $(\frac{i+4}{5})^n$ converge (nombre de module < 1).

c) Soit $q = e^{i\pi/4}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$q^{8k} = 1 \quad \text{et} \quad q^{8k+1} = q$$

donc la suite (q^n) diverge (on a trouvé deux suites extraites qui convergent vers des limites distinctes).

d) Soit $q = e^i$, alors d'après la proposition ci-dessus la suite (q^n) diverge, c'est-à-dire que

$$\cos(n) + i\sin(n)$$

diverge.

La formule suivante (démontrée dans le Livre IX des Éléments d'Euclide) permet de calculer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique

Proposition 1.4.12. *Soit q un élément de $\mathbb{C}$, $q \neq 1$, et soit n un entier. Alors*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Si $|q| < 1$, cette suite converge vers $\frac{1}{1-q}$.

Comparaison importante.

Proposition 1.4.13. *Soit r un réel quelconque. Alors*

$$\lim \frac{r^n}{n!} = 0$$

Démonstration. On peut supposer que r est positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\frac{r^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{r}{k}$$

La suite $(\frac{r}{k})_{k\geq 1}$ tend vers 0. Donc il existe k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$, on ait $\frac{r}{k} \leq \frac{1}{2}$. Alors, pour $n \geq k_0$, nous avons

$$\frac{r^n}{n!} \leq \left(\prod_{k=1}^{k_0} \frac{r}{k}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k_0}$$

Comme la suite $(\frac{1}{2})^{n-k_0}$ converge vers 0, on en déduit le résultat. □

1.5 Valeurs d'adhérence

Nous avons vu que toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse, mais on aimerait quand même dire quelque chose sur les suites bornées.

Définition 1.5.1. On dit qu'un nombre ℓ est valeur d'adhérence d'une suite (u_n) s'il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers ℓ.

Théorème 1.5.2 (Bolzano-Weierstrass). *Toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$ possède (au moins) une valeur d'adhérence.*

Démonstration. Il suffit de montrer le théorème pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite réelle bornée. Nous construisons par récurrence une suite d'intervalles $[a_k, b_k]$, de la façon suivante.

– Le point de départ est un intervalle $[a_0, b_0]$ contenant tous les termes de la suite (u_n) (c'est possible puisque (u_n) est bornée).

– Supposons $[a_k, b_k]$ construit, et contenant une infinité de termes de la suite (u_n). Alors au moins l'un des deux intervalles $[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$ et $[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$ contient une infinité de termes de la suite. On pose

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}] & \text{si celui-ci contient une infinité de termes de la suite} \\ [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k] & \text{sinon} \end{cases}$$

Par construction nous avons, pour tout k, les propriétés suivantes :

1) $[a_k, b_k]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n)
2) $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$
3) $b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k}$

En particulier les suites (a_k) et (b_k) sont adjacentes, donc convergent vers une limite commune ℓ. En outre, on construit une suite d'entiers (n_k) strictement croissante de la façon suivante : on pose $n_0 = 0$ et, supposant n_k construit, on choisit n_{k+1} strictement supérieur à n_k tel que $u_{n_{k+1}}$ appartienne à $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, un tel choix étant toujours possible puisque $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n). On constate que la suite extraite (u_{n_k}) obtenue satisfait

$$a_k \leq u_{n_k} \leq b_k$$

et donc (u_{n_k}) converge vers ℓ d'après le théorème des gendarmes. Ce qu'on voulait. □

Remarquons que la suite construite dans notre preuve converge vers la plus petite valeur d'adhérence de la suite (u_n).

Exemples. a) La suite $u_n = (-1)^n$ admet deux valeurs d'adhérence : -1 et 1.

b) La suite $u_n = (-1)^n n$ n'admet aucune valeur d'adhérence (notons qu'elle n'est pas bornée).

c) La suite $u_n = \sin(n)$ admet tout élément de $[-1, 1]$ comme valeur d'adhérence !

1.6 Suites de Cauchy

Comment exprimer qu'une suite converge sans connaître sa limite à l'avance ? Au lieu de dire que les termes de la suite se rapprochent d'une certaine limite ℓ, on va dire que les termes de la suite se rapprochent les uns des autres.

Définition 1.6.1. On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ est une *suite de Cauchy* si la condition suivante est vérifiée :

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que, pour tous } p, q \geq N, \text{ on ait } |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

Lemme 1.6.2. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{K}$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

mais alors, pour $p, q \geq N$ nous avons

$$|u_p - u_q| = |(u_p - \ell) - (u_q - \ell)| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leq \varepsilon$$

donc (u_n) est de Cauchy. □

Lemme 1.6.3. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy. D'après la définition, en fixant $\varepsilon = 1$, on trouve qu'il existe un entier N tel que, pour tout $p, q \geq N$, on ait

$$|u_p - u_q| \leq 1$$

En prenant $q = N$ on trouve que, pour tout $p \geq N$,

$$|u_p| = |u_N + (u_p - u_N)| \leq |u_N| + 1$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq \text{Max}(|u_N| + 1, |u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|)$$

ainsi la suite (u_n) est bornée. □

Lemme 1.6.4. *Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, alors elle converge vers cette valeur.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence ℓ, montrons que (u_n) converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, on ait

$$|u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'autre part, on peut choisir une suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de (u_n) qui converge vers ℓ. Il existe donc un entier M tel que, pour tout $k \geq M$, on ait

$$|u_{n_k} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme la suite n_k est strictement croissante, on sait que $n_k \geq k$ pour tout k. Ainsi, pour $k \geq \mathrm{Max}(M, N)$, nous avons simultanément $n_k \geq k \geq N$ et $k \geq M$. D'où

$$|u_k - \ell| \leq |u_k - u_{n_k}| + |u_{n_k} - \ell| \leq \varepsilon$$

ce qu'on voulait. □

On en déduit le résultat suivant

Théorème 1.6.5. *Une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

Démonstration. D'après le lemme 1.6.2, toute suite convergente est de Cauchy. Réciproquement, soit (u_n) une suite de Cauchy, montrons qu'elle converge dans $\mathbb{K}$. D'après le lemme 1.6.3, (u_n) est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, (u_n) admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathbb{K}$. On en déduit que (u_n) converge (vers cette valeur) par le lemme 1.6.4. □

Ainsi, pour montrer la convergence d'une suite (réelle ou complexe), il suffit de vérifier que celle-ci est de Cauchy.

Exemple. Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n u_n}$$

On vérifie facilement que (u_n) est à termes positifs, et que (u_n) est croissante. Donc $u_n \geq 1$ pour tout n. Mais il n'y a pas de majoration évidente.

Montrons que (u_n) est de Cauchy. Soient p, q deux entiers tels que $p > q$. Nous avons

$$u_p - u_q = \sum_{k=q}^{p-1}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=q}^{p-1} \frac{1}{2^k u_k} \leq \sum_{k=q}^{p-1} \frac{1}{2^k}$$

(on a majoré $\frac{1}{u_k}$ par 1). D'autre part,

$$\sum_{k=q}^{p-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^q} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^{p-q}}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \leq \frac{1}{2^q} \cdot 2$$

Comme le membre de droite tend vers 0 quand q tend vers $+\infty$, on en déduit que $u_p - u_q$ peut être rendu aussi petit que l'on veut. Donc (u_n) est de Cauchy.

Exemple. La suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$$

est une suite à valeurs dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers $\sqrt{2}$. Il s'agit donc d'une suite de Cauchy (dans $\mathbb{R}$ comme dans $\mathbb{Q}$), mais, comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Ainsi le corps $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, contrairement à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.