MHT 204 — Analyse 1 pour informaticiens Le 14 juin 2011

Devoir surveillé final — Corrigé succinct

Partie I

Exercice 1 (Question de cours)**.** Théorème des accroissements finis : Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Exercice 2. En appliquant le théorème des accroissements à la fonction ln sur l'intervalle $[a, b]$, on trouve qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \ln'(c) = \frac{1}{c}$$

Mais alors

$$\frac{b - a}{\ln b - \ln a} = c \in]a, b[$$

ce qu'on voulait.

Exercice 3.

1. f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ en tant que composée de fonctions dérivables, et sur $]0, +\infty[$ car elle est nulle sur cet intervalle ; étudions donc la dérivabilité en 0.
   On a
   $$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \begin{cases} e^{1/t}/t & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$
   or $e^{1/t}/t$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs négatives. Donc f est dérivable à gauche et à droite en 0 et ces dérivées sont identiques, donc f est dérivable et $f'(0) = 0$.
2. On a
   $$f'(t) = \begin{cases} -e^{1/t}/t^2 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$
   donc le taux d'accroissement de f' au voisinage de 0 est
   $$\frac{f'(t) - f'(0)}{t} = \begin{cases} -e^{1/t}/t^3 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$
   et il tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc f admet une dérivée seconde en 0, et $f''(0) = 0$.

3. On a déjà trouvé que $f'(t) = -e^{1/t}/t^2$ pour $t < 0$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$, en prenant $P_1(t) = -1$. Supposons la formule vraie au rang n. Alors $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$ d'où

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{P_n'(t)t^{2n} - P_n(t)(2n)t^{2n-1}}{t^{4n}} e^{1/t} + \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}(-1/t^2) \\ &= \frac{P_n'(t)t^2 - (2nt+1)P_n(t)}{t^{2(n+1)}} e^{1/t} \end{aligned}$$

donc la formule est vraie au rang $n+1$ et l'on a la relation

$$P_{n+1}(t) = P_n'(t)t^2 - (2nt+1)P_n(t).$$

4. Il suffit d'étudier ce qui se passe en 0.
Montrons par récurrence que f est indéfiniment dérivable en 0, et que pour tout $n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$. On sait que c'est vrai au rang 1. Supposons que f est n-fois dérivable, et que $f^{(n)}(0) = 0$. Alors le taux d'accroissement de $f^{(n)}$ en 0 est :

$$\frac{f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)}{t} = \begin{cases} P_n(t)e^{1/t}/t^{2n+1} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

et sa limite est 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0, et $f^{(n+1)}(0) = 0$. Donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $n+1$. Par conséquent, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 4. a) La formule de Taylor-Young à l'ordre 5 au voisinage de 0 pour la fonction $x \mapsto \cos(x) + x$ s'écrit

$$\cos(x) + x = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x)$$

b) De même

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x)$$

c) En composant les développements de Taylor on trouve que

$$\varphi(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{4}x^4 + \frac{11}{5}x^5 + x^5\varepsilon(x)$$

d) Le coefficient de x^4 dans le développement de Taylor de φ est

$$\frac{\varphi^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{7}{4} \quad \text{d'où} \quad \varphi^{(4)}(0) = -42$$

et de même $\varphi^{(5)}(0) = 264$.

e) L'équation de la tangente à la courbe représentative de φ au point 0 est la partie de degré 1 du développement de Taylor, c'est-à-dire $y = x$. La courbe est située en-dessous de cette tangente car le terme de degré 2 est négatif.

Exercice 5. a) En posant $t = \ln(x)$ il vient $dt = dx/x$. Les nouvelles bornes sont 1 et 2. Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x)+1)}\,dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{t+1}\,dt \\ &= [\ln(t+1)]_1^2 = \ln(3) - \ln(2) = \ln(\frac{3}{2}) \end{aligned}$$

b) On pose $u = \cos(x)$. Il vient $du = -\sin(x)dx$. Les nouvelles bornes sont 1 et 0. Cela donne

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2011} \sin(x)\,dx \\ &= \int_1^0 u^{2011}\,(-du) = \int_0^1 u^{2011}\,du \\ &= \left[\frac{u^{2012}}{2012}\right]_0^1 = \frac{1}{2012} \end{aligned}$$

Partie II

Quelle est la valeur de :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2) - \cos(x)}{x^2}$$

Réponses possibles :

× $+\infty$

→ $\frac{3}{2}$

× $-\frac{7}{4}$

× Cette limite n'existe pas

Développement limité.

Quelle est la valeur de :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Réponses possibles :

× 0

× $\ln(1+\sqrt{2})$

× $\frac{3}{4} - \sin(1)$

→ $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

Changement de variable ou intégration par parties.

Quelle est la valeur de :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2}e^{-\frac{n}{k}}$$

Réponses possibles :

→ e^{-1}

× $\frac{\pi}{8}-1$

× 0

× $\arctan(e)-1$

On reconnaît là une somme de Riemann.

La suite (u_n) définie par

$$u_n = n^{3+\sin(n)}\left(\frac{(-1)^n+1}{n+\cos(n!)}\right)$$

est-elle :

Réponses possibles :

× croissante

× convergente

→ divergente

× de Cauchy

La suite (u_{2k}) tend vers $+\infty$.