

 <p style="font-size: small;">Direction de la UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies Licence</p>	<p>ANNÉE UNIVERSITAIRE 2010/2011 DS Terminal Printemps</p> <p>ÉTAPE : CSB2 UE : MHT204 Épreuve : MHT204DST Date : 14 juin 2011 Heure : 14h00 Durée : 3 heures Épreuve de Monsieur : Gillibert, J. Tous Documents Interdits</p>	 <p style="font-size: small;">D é p a r t e m e n t L i c e n c e</p>
--	--	--

Ce sujet comporte deux parties. La première partie est constituée de cinq exercices. La seconde partie est un QCM. Il vous est demandé de traiter la première partie sur la copie d'examen, et de répondre à la seconde directement sur le sujet, que vous glisserez dans votre copie à la fin de l'épreuve.

Partie I

Exercice 1 (Question de cours). Énoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 2. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que

$$a < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < b$$

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} , en particulier en $t = 0$.
2. Étudier l'existence de $f''(0)$.
3. Montrer par récurrence que, pour $t < 0$, la dérivée n -ième de f s'écrit

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$

où P_n est un polynôme.

4. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 4. a) Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 5 au voisinage de 0 pour la fonction $x \mapsto \cos(x) + x$ (on ne demande pas de justification).

b) Même question pour la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

c) Même question pour la fonction $\varphi : x \mapsto \ln(1+x-x^2)$.

d) Déterminer $\varphi^{(4)}(0)$ et $\varphi^{(5)}(0)$.

e) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe représentative de φ au point 0 ? Comment se positionne la courbe par rapport à cette tangente ?

Exercice 5. a) Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x)+1)} dx$$

(Indication : on pourra effectuer le changement de variable $t = \ln(x)$).

b) Calculer l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2011} \sin(x) dx$$

Partie II

Questions à choix multiples. Il y a une seule bonne réponse par question. Les mauvaises réponses ne seront pas notées négativement.

1) Quelle est la valeur de :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x^2) - \cos(x)}{x^2}$$

Réponses possibles :

- a. $+\infty$
- b. $\frac{3}{2}$
- c. $-\frac{7}{4}$
- d. Cette limite n'existe pas

2) Quelle est la valeur de :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

Réponses possibles :

- a. 0
- b. $\ln(1 + \sqrt{2})$
- c. $\frac{3}{4} - \sin(1)$
- d. $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

3) Quelle est la valeur de :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2} e^{-\frac{n}{k}}$$

Réponses possibles :

- a. e^{-1}
- b. $\frac{\pi}{8} - 1$
- c. 0
- d. $\arctan(e) - 1$

4) La suite (u_n) définie par

$$u_n = n^{3+\sin(n)} \left(\frac{(-1)^n + 1}{n + \cos(n!)} \right)$$

est-elle :

Réponses possibles :

- a. croissante
- b. convergente
- c. divergente
- d. de Cauchy

FIN