Scolarité et de la Vie Étudiante Direction de la
UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies
L I C E N C E

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2009/2010
DS Terminal Printemps

ÉTAPE : CSB2 UE : MHT204
Épreuve : MHT204DST
Date : 16 juin 2010
Heure : 14h00 *Durée :* 3 heures
Épreuve de Monsieur : Gillibert, J.
Tous Documents Interdits

Département Licence

Exercice 1 (Question de cours). Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 2. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

$$\varphi(x) = E(x)\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = E(x)\sin(\pi x)$$

(le symbole $E(x)$ désignant la partie entière de x).

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ \cos(t) - 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

a) Vérifier que f est continue en 0.

b) Montrer que f est dérivable en 0. Quelle est la valeur de $f'(0)$?

Exercice 4. a) Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 au voisinage de 0 pour la fonction

$$k(x) = \ln(1+x) + \sin(2x)$$

b) Même question pour la fonction $k(x)^2$.

c) Déterminer la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{k(x)}{x}$$

Exercice 5. 1) Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 au voisinage de 0 pour les fonctions suivantes

$$\text{a) } f(x) = e^x \sin x \qquad \text{et} \qquad \text{b) } g(x) = \frac{e^{-x}}{x-1}$$

2) Quelle est la valeur de $f^{(4)}(0)$? Et celle de $g^{(4)}(0)$?

Exercice 6. a) En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{e^x - 1}$, calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\,dx$$

b) En intégrant par parties, calculer la valeur de l'intégrale

$$J = \int_1^e \frac{\ln x}{x^5}\,dx$$

T.S.V.P.

Exercice 7. 1) Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}$$

(indication : on pourra commencer par réécrire le membre de gauche sous une forme plus agréable).

2) On suppose en outre que $0 < a \leq b$. Montrer les inégalités suivantes :

$$a \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq b \quad \text{et} \quad a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$$

3) Soient u_0 et v_0 des réels tels que $0 < u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) construites par récurrence en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$$

(a) Montrer que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que (u_n) est croissante, et que (v_n) est décroissante.

(c) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent et ont même limite.

FIN