Devoir surveillé n° 2 — Corrigé succinct

Exercice 1 (Questions de cours). a) Théorème de Rolle : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

b) Théorème de Taylor-Young : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (où I est un intervalle). Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\varepsilon(h) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0) + h^n\varepsilon(h) \end{aligned}$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

Exercice 2. a) La fonction f' est donnée par

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$$

Sa dérivée est

$$f''(x) = 12x^2 + 6x = 6x(2x+1)$$

Les racines de f'' sont $-\frac{1}{2}$ et 0. On en déduit les variations de la fonction f' : elle est croissante sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$, décroissante sur $[-\frac{1}{2}, 0]$, et à nouveau croissante sur $[0, +\infty[$.

b) La fonction f' présente deux extréma locaux : $f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$ est un maximum local, et $f'(0) = -1$ est un minimum local. Il est donc clair que f' ne s'annule pas sur $]-\infty, 0]$. D'autre part, f' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$$

En appliquant le théorème de la bijection à f sur l'intervalle $[0, +\infty[$, on en déduit qu'il existe un unique réel α tel que $f'(\alpha) = 0$.

c) Comme $f'(0) = -1$ et $f'(1) = 6$, on en déduit que $0 < \alpha < 1$. Il vient alors :

$$0 < \alpha^4 \quad \text{et} \quad 0 < \alpha^3 \quad \text{et} \quad 0 < -\alpha + 1$$

En additionnant le tout, on trouve que $f(\alpha) > 0$.

d) La fonction f' est strictement négative sur $]-\infty, \alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$. On en déduit que f admet un minimum global en α. Comme $f(\alpha) > 0$, ceci montre que f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. a) La formule de Taylor-Young à l'ordre 4 au voisinage de 0 pour la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$$

b) De même pour la fonction $x \mapsto e^x$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$$

c) En multipliant les deux polynômes de Taylor, on trouve que

$$\begin{aligned} e^x \sin(x) &= (x - \frac{x^3}{6})(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}) + x^4\varepsilon(x) \\ &= x + x^2 + x^3(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) + x^4(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}) + x^4\varepsilon(x) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x) \end{aligned}$$

d) Le coefficient de x^4 dans le polynôme de Taylor de f en 0 est $\frac{\varphi^{(4)}(0)}{4!}$. Vu le résultat obtenu à la question c), on en déduit que $\varphi^{(4)}(0) = 0$.

Exercice 4. D'après Taylor-Young à l'ordre 1 en 0 pour $\sin(x)$, nous avons

$$\sin(x) = x + x\varepsilon(x) = x(1 + \varepsilon(x))$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Ainsi, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$\frac{\sin(\lambda x)}{\sin(x)} = \frac{\lambda x(1 + \varepsilon(\lambda x))}{x(1 + \varepsilon(x))} = \lambda \cdot \frac{1 + \varepsilon(\lambda x)}{1 + \varepsilon(x)}$$

On en déduit aussitôt que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(x)} = \lambda$$