Devoir surveillé n° 2 — Corrigé succinct

Exercice 1 (Énoncer le théorème des accroissements finis)**.** Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Exercice 2. a) La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Étudions la dérivabilité de f en 0. Pour tout $x \neq 0$, nous avons

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1 + |x|}$$

et cette quantité tend vers 1 quand x tend vers 0. Cela signifie que f est dérivable en 0, et $f'(0) = 1$.

b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Étudions la dérivabilité de g à droite et à gauche en 0. Comme $g(0) = 1$, nous avons (pour $x \neq 0$)

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Maintenant, par dérivation de la fonction sinus en 0 nous avons

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \cos(0) = 1$$

et, par dérivation de la fonction exponentielle en 0, il vient

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1$$

Ainsi $g'_g(0) = g'_d(0) = 1$, donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 1$.

Exercice 3. Soit $n \geq 2$ un entier fixé, et soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}$$

a) Il est clair que la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ puisque c'est une fonction rationnelle sans pôle dans cet intervalle. D'après la formule de la dérivée d'un quotient, on obtient
$$f'(x) = \frac{n(x^{n-1} - 1)}{(1 + x)^{n+1}}$$

b) Il résulte clairement de l'expression précédente que $f'(x)$ est du signe de $x^{n-1} - 1$ sur $[0, +\infty[$. Comme $n - 1 \geq 1$, on en déduit que $f' \leq 0$ sur $[0, 1]$ et $f' \geq 0$ sur $[1, +\infty[$. Il en résulte que f est décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$. Par suite, f atteint son minimum en 1 et ce minimum vaut $f(1) = 2^{1-n}$.

c) Il résulte de la question précédente que, pour tout $x \geq 0$, nous avons $f(x) \geq f(1)$. Cette inégalité s'écrit :
$$(1 + x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n)$$

d) Soient a et b deux réels positifs. Si $a = b = 0$, l'égalité a lieu. Sinon, quitte à échanger a et b, on peut supposer que $a \neq 0$. On applique alors l'inégalité de la question précédente au réel $x = \frac{b}{a}$, ce qui donne, après avoir multiplié par a^n les deux membres de l'inégalité, le résultat voulu.

Exercice 4. a) La fonction $x \mapsto \arctan x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. De plus, il est clair que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \frac{1}{1 + x^2} \leq 1$$

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis, que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$$

b) L'inégalité ci-dessus montre que la fonction $x \mapsto \arctan x$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors en prenant $\delta = \varepsilon$ nous avons, pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'implication suivante :
$$|x - y| \leq \delta \Longrightarrow |\arctan x - \arctan y| \leq \varepsilon$$

ce qui exprime bien l'uniforme continuité de arctan sur $\mathbb{R}$.