Devoir surveillé n° 2 — Durée : 1h30

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Énoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Exercice 2. a) Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

b) Même question pour la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \sin x + 1 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 3. Soit $n \geq 2$ un entier fixé, et soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}$$

a) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer f'.

b) En étudiant le signe de f' sur $[0, +\infty[$, montrer que f atteint un minimum (global) sur $[0, +\infty[$ que l'on déterminera.

c) En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x \geq 0, \quad (1 + x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n)$$

d) Montrer que, si a et b sont deux réels positifs, alors

$$(a + b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)$$

Exercice 4. a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$$

b) La fonction $x \mapsto \arctan x$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

Un corrigé est disponible en ligne à l'adresse
`http://www.math.u-bordeaux1.fr/~gilliber/enseignement.html`