Devoir Surveillé 2, MHT204, 10 avril, 2009

Exercice 1 Donner un développement limité à l'ordre 3 autour de 0 pour les fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^3 + \cos(2x)$;

   Solution : $x^3 + 1 - \frac{(2x)^2}{2}$

2. $f_2(x) = x^3(\cos(x^2))$;

   Solution :x^3 *(toutes les autres termes sont* $o_0(x)$.*)*

3. $f_3(x) = (\ln(1 + x) + \sin(2x))^2$;

   On a $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 o(1)$ *et pour* $\sin(2x) = 2x + x^2 o(1))$ *donc*

   $$f_3(x) = (3x - \frac{x^2}{2} + x^2(o(1)))^2 = 9x^2 - 3x^3 + o(1)x^3$$

   et le développement limité à l'ordre 3 autour de 0 est égale à
   Solution :$9x^2 - 3x^3$.

4. $f_4(x) = (1 + x)^x$.

   On réécrit $(1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$ *et on remarque que* $x\ln(1+x) \to 0$ *quand* $x \to 0$ *donc on met la développement limité* $x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3 o(1)$ *dans la développement limité pour* e^x *pour obtenir*
   Solution :$1 + x^2 - \frac{x^3}{2}$.

Exercice 2 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\ln(1-x)}$;

   On écrit $\sin(2x) = 2x + xo(1)$ *et* $\ln(1 - x) = -x + xo(1)$ *pour voir que la limite est égale à 2.*

2. $\lim_{x\to 0} \frac{2x-\tan(2x)}{x\ln(1+x^2)}$.

   On écrit $\tan(2x) = 2x + \frac{(2x)^3}{3} + o(1)x^3$ *et* $x\ln(1 + x^2) = (x^3 + o(1)x^3$ *pour voir que la limite existe et est égale à 8.*

Exercice 3 Calculer les grandes et petites sommes de Darboux pour la fonction f : $[0, 5] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{9 - x^3} & 0 \le x \le 2 \\ 1 + \cos^2((x^2 + 1)\pi) & 2 < x \le 5 \end{cases} \tag{1}$$

et la partition $X = \{0, 2, 3, 5\}$.

On voit que f est décroissante sur [0,2], et que les minima sur [2,3] et [3,5] sont atteints quand $\cos((x^2+1)\pi) = -1$ et alors la petite somme de Darboux est égale à

$$s(f, X) = f(2) \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$$

D'autre part le maximum sur [0,2] est atteint en 0, les maxima sur [2,3] et [3,5] sont atteints quand $\cos((x^2+1)\pi) = 1$. Ainsi, la grande somme est égale à

$$S(f, X) = f(0) \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 + 2 + 4 = 14$$

Exercice 4 Soit f la fonction de l'exercice 3. Trouvez deux nombres m et M tels que :

$$m \leq \int_0^5 f(x)dx \leq M$$

et $M - m < 9$.

Il faut calculer des grandes et petites sommes avec plus de points dans les subdivisions. J'ajoute le point $5^{\frac{1}{3}}$ entre 0 et 2 pour obtenir une subdivision X_1 avec

$$s(f, X_1) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 5$$

et

$$S(f, X_1) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 13$$

et donc je sais que

$$5 \leq \int_0^5 f(x)dx \leq 13.$$