CORRIGÉ : Devoir Surveillé 2, MHT204, 21 mars 2008

Exercice 1

Trouver les polynômes de Taylor à l'ordre 4 au voisinage de 0 pour les fonctions suivantes.

(a) $f(x) = \cos(2x)$
RÉPONSE :$1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$

(b) $g(x) = e^{x^2}$
RÉPONSE :$1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$

(c) $h(x) = x^2$
RÉPONSE :x^2.

Exercice 2

Utiliser le théorème des accroissements finis pour trouver deux réels M_1 et M_2 tels que $M_2 - M_1 \leq 0,01$ et

$$M_1 \leq \ln(1 + 0,001) \leq M_2.$$

Justifiez votre réponse.
RÉPONSE :*Par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction* $f(x) = \ln(1+x)$ *on a*

$$\frac{\ln(1.001) - \ln(1)}{0.001} = \frac{1}{1+c} \tag{1}$$

avec $c \in]0, 0.001[$. *Donc*

$$\left|\frac{\ln(1.001) - 0}{0.001}\right| \leq 1 \tag{2}$$

et alors on peut prendre $M_1 = -0.001$ *et* $M_2 = 0.001$. *Avec un peu de bon sens, on sait que* $\ln(1.001) > 0$ *et on peut même prendre* $M_1 = 0$.

Exercice 3

Soit P le polynôme

$$P(x) = x^{101} + x + 3.$$

(a) Trouver $\lim_{x\to+\infty} P(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} P(x)$
RÉPONSE : $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$.

(b) Est-ce que P admet des racines réelles ? Justifier.
RÉPONSE :*Oui, par le théorème des valeurs intermédiaires.*

(c) Déterminer le nombre de racines réelles de P. (Indication : utiliser le Théorème de Rolle).
RÉPONSE :*Le dérivée de $P(x)$ est égale à $101x^100+1$ et donc $P^{'}(x)$ ne possède pas de zéros. Par le théoreme de Rolle, cela implique que $P(x)$ possède au plus une racine. Donc,$P(x)$ posséde exactement une racine.*

Exercice 4

Les fonctions suivantes possèdent-elles des réciproques ? Si oui, donner l'expression de la fonction réciproque (avec son domaine) et déterminer en quels points elle est (i) continue, (ii) dérivable.

$$g : [-3, -1] \to \mathbb{R}; \qquad g(x) = \ln|x|; \tag{3}$$

RÉPONSE :*La fonction g est bien injective, et donc elle possède une reciproque. L'image de $g(x)$ est égale à $[0, \ln(3)]$ et donc cette intervalle est la domaine de g^{-1}. Pour calculer g^{-1} on résout l'equation $y = \ln|x|$ pour x sur l'intervalle $[-3, -1]$ et on obtient $x = -\exp(y)$. Donc, $g^{-1}(y) = -\exp(y)$.*

$$h : [-1, 1] \to \mathbb{R}; \qquad h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{si } x \in [-1, 0[. \end{cases} \tag{4}$$

RÉPONSE :*La fonction h est bien injective, et donc elle possède une reciproque. L'image de h est égale à $[-2, -1[\cup[0, 1]$ et donc cet ensemble est la domaine de h^{-1}. Pour calculer h^{-1} on résout l'equation $y = h(x)$ pour x sur l'ensemble $[-2, -1[\cup[0, 1]$*

et on obtient

$$h^{-1}(y)) = \begin{cases} y & si\ y \in [0, 1] \\ y + 1 & si\ y \in [-2, -1[. \end{cases} \tag{5}$$