Devoir surveillé n° 1 — Corrigé succinct

Exercice 1 (Question de cours)**.** Théorème de Bolzano-Weierstrass : Toute suite bornée (réelle ou complexe) possède au moins une valeur d'adhérence.

Exercice 2. a) Il vient

$$u_n = \frac{n! + 2n}{n!} = 1 + \frac{2n}{n!} = 1 + \frac{2}{(n-1)!}$$

ce qui montre que (u_n) converge vers 1.

b) En multipliant par la quantité conjuguée,

$$v_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) = n\left(\frac{(1+\frac{1}{n}) - (1-\frac{1}{n})}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}}\right) = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

donc (v_n) converge vers 1.

c) On constate que (x_{2k}) converge vers 1 (en fait, elle est constante égale à 1), et que (x_{2k+1}) converge vers -1. Par conséquent, (x_n) diverge.

d) Nous avons

$$|y_n| = \left|\frac{2^n \sin(\sqrt{n})}{n!}\right| \leq \frac{2^n}{n!}$$

et on sait (cf. cours) que la quantité à droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que (y_n) converge vers 0.

Exercice 3. 1. Comme (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans $[0,1]$, nous avons, pour tout entier n,

$$u_n v_n \leq u_n \leq 1$$

D'autre part, $(u_n v_n)$ converge vers 1. Donc, par le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 1. Un raisonnement analogue montre que (v_n) converge vers 1.

2. Soient $a_n = (-1)^n$ et $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Ces deux suites sont divergentes, et leur produit converge vers 1.

Exercice 4. On vérifie facilement que la suite (t_n) converge vers 0. Or, d'après le cours, toute suite convergente est de Cauchy. Donc (t_n) est de Cauchy.