

Devoir surveillé n° 1 — Durée : 1h30

Exercice 1 (Question de cours). Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 2. Les suites ci-dessous sont-elles convergentes ? Si oui, déterminer leur limite. Sinon, expliquer pourquoi.

$$a) u_n = \frac{n! + 2n}{n!}$$

$$b) v_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)$$

$$c) x_n = \frac{(-1)^n n^2 + 1}{n^2 + 1}$$

$$d) y_n = \frac{2^n \sin(\sqrt{n})}{n!}$$

Exercice 3. 1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites, à valeurs dans $[0, 1]$, telles que la suite $(u_n v_n)$ converge vers 1. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

2. Donner un exemple de deux suites réelles (a_n) et (b_n) divergentes telles que $(a_n b_n)$ converge vers 1.

Exercice 4. La suite (t_n) définie par

$$t_n = \frac{\cos(n! + \pi^2)}{n + 1}$$

est-elle une suite de Cauchy ? Justifiez brièvement votre réponse.

Un corrigé est disponible en ligne à l'adresse

<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~gilliber/enseignement.html>