Devoir surveillé n° 1 — Corrigé succinct

Exercice 1. *a*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$u_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n} = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 - \frac{(-1)^n}{n}}$$

On en déduit que (u_n) converge vers 1.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire

$$v_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^n} + 3}{\frac{2^n}{3^n} + 1} = \frac{2(\frac{2}{3})^n + 3}{(\frac{2}{3})^n + 1}$$

Comme la suite $(\frac{2}{3})^n$ converge vers 0, on en déduit que (v_n) converge vers 3.

c) Il vient

$$|x_n| \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

et la suite de droite tend vers 0. Donc (x_n) tend vers 0.

d) La suite extraite

$$y_{2k} = (-1)^{2k+1} \sin(k\pi) = 0$$

tend vers 0. D'autre part, la suite extraite

$$y_{4k+1} = (-1)^{4k+2} \sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$$

tend vers 1. On en déduit que (y_n) diverge.

Exercice 2.

$$w_n = n^{3+\sin(n)} \left(\frac{(-1)^n + 1}{n + \cos(n!)} \right)$$

(*a*) $w_0 = 0$, $w_1 = 0$, $w_2 = 2^{3+\sin(2)}(\frac{2}{2+\cos(2)})$ et $w_3 = 0$.

(*b*) Soit $k \in \mathbb{N}$, alors

$$w_{2k+1} = (2k+1)^{3+\sin(2k+1)} \left(\frac{-1+1}{2k+1+\cos((2k+1)!)} \right) = 0$$

Ainsi, la suite extraite $(w_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ des termes impairs de (w_n) converge vers 0.

(c) Nous avons

$$w_{2k} = (2k)^{3+\sin(2k)} \left(\frac{2}{2k+\cos((2k)!)}\right)$$

D'une part, $3 + \sin(2k) \geq 2$ donc :

$$w_{2k} \geq (2k)^2 \left(\frac{2}{2k+\cos((2k)!)}\right)$$

D'autre part, $2k + \cos((2k)!) \leq 2k + 1$ donc :

$$w_{2k} \geq (2k)^2 \left(\frac{2}{2k+1}\right)$$

Comme le membre de droite tend vers $+\infty$, on en déduit que la suite $(w_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, en particulier elle n'est pas bornée.

(d) La suite (w_n) diverge, car, d'après la question précédente, elle n'est pas bornée.

Exercice 3. Les suites $(\frac{n}{n^2+1})$ et $(\frac{1}{n+1})$ convergent vers 0. Donc les suites encadrant b données par l'énoncé convergent toutes les deux vers a. Il suffit d'appliquer le théorème des gendarmes pour en déduire que $a = b$.