Corrigé : Devoir Surveillé 1, MHT204, 18 février 2009

Exercice 1 Trouvez un exemple pour chacun des objets décrits ci-dessous. Justifiez s'il n'en existe pas.

1. Une suite bornée qui diverge.
$$x_n = (-1)^n$$
2. Une suite bornée qui ne possède pas de sous-suite convergente.

   IMPOSSIBLE ! Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, une telle suite n'existe pas.
3. Une suite monotone qui diverge.
$$x_n = -n$$
4. Une fonction continue sur $]1, 3]$ qui n'atteint pas ses bornes.
$$f(x) = \frac{1}{x-1} \text{ pour tout } x \in]1, 3]$$
5. Une fonction continue sur $[1, 3]$ qui n'atteint pas ses bornes.

   IMPOSSIBLE ! Par le théorème des extrema une fonction continue atteint toujours ses bornes sur un intervalle fermé borné.

Exercice 2 Soit $f : [0, 8\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = \cos(\frac{x}{4}) + \frac{x}{5}$$

1. Quelle est l'image de l'intervalle $[4\pi, 6\pi]$ par la fonction f ?

   On remarque que f est croissante sur $[4\pi, 6\pi]$. Donc l'image est égale à $[-1+\frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}]$.
2. Est-ce qu'il existe $x \in]2\pi, 6\pi[$ tel que $f(x) = \pi$?

   Oui, car $f(2\pi) = \frac{2\pi}{5}$ et $f(6\pi) = \frac{6\pi}{5}$.
3. Trouver les bornes de f sur l'intervalle $]4\pi, 6\pi]$. Sont-elles atteintes ?

   On remarque que f est croissante sur $]4\pi, 6\pi]$. Donc les bornes sont $f(4\pi) = -1+\frac{4\pi}{5}$ et $f(6\pi) = \frac{6\pi}{5}$. Mais la borne $f(4\pi)$ n'est pas atteinte.
4. Les bornes de f sur l'intervalle $[1, 2]$ sont-elles atteintes ?

   Oui, par le théorème des extrema.

Exercice 3 Soit $x_n = (-1)^{n^2} + \frac{1}{2n}$. Trouvez des sous-suites convergentes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = -1.$$

La suite x_n converge-t-elle ? Justifier.

Non car elle possède deux sous-suites avec des limites différentes.

Exercice 4 Soit $f : [-2,4] \longrightarrow [-8,10]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & -2 \leq x \leq 2 \\ x+6 & 2 < x \leq 4 \end{cases} \tag{1}$$

La fonction f est-elle continue ?

Oui, sur [-2,2[et]2,4] elle est égale à des polynômes et donc continue, et

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2-} f(x) = 8.$$

Possède-t-elle une réciproque ?

Oui, car elle est strictement croissante donc injective, et elle est surjective car $f(-2) = -8$ *et* $f(4) = 10$.

Si oui, donner la définition de la réciproque.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} & -8 \leq x \leq 8 \\ x-6 & 8 < x \leq 10 \end{cases} \tag{2}$$