

Devoir Surveillé 1, MHT204, 18 février 2009

Exercice 1 Trouvez un exemple pour chacun des objets décrits ci-dessous. Justifiez s'il n'en existe pas.

1. Une suite bornée qui diverge.
2. Une suite bornée qui ne possède pas de sous-suite convergente.
3. Une suite monotone qui diverge.
4. Une fonction continue sur $]1, 3]$ qui n'atteint pas ses bornes.
5. Une fonction continue sur $[1, 3]$ qui n'atteint pas ses bornes.

Exercice 2 Soit $f : [0, 8\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{5}$$

1. Quelle est l'image de l'intervalle $[4\pi, 6\pi]$ par la fonction f ?
2. Est-ce qu'il existe $x \in]2\pi, 6\pi[$ tel que $f(x) = \pi$?
3. Trouver les bornes de f sur l'intervalle $]4\pi, 6\pi]$. Sont-elles atteintes ?
4. Les bornes de f sur l'intervalle $[1, 2]$ sont-elles atteintes ?

Exercice 3 Soit $x_n = (-1)^{n^2} + \frac{1}{2^n}$. Trouvez des sous-suites convergentes de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La suite x_n converge-t-elle ? Justifier.

Exercice 4 Soit $f : [-2, 4] \longrightarrow [-8, 10]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & -2 \leq x \leq 2 \\ x + 6 & 2 < x \leq 4 \end{cases} \quad (1)$$

La fonction f est-elle continue ? Possède-t-elle une réciproque ? Si oui, donner la définition de la réciproque.