Devoir Surveillé 1, MHT204, 15 février 2008

Exercice 1

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que la fonction g définie par

$$g(t) = f\left(t + \frac{1}{2}\right) - f(t)$$

s'annule en (au moins) un point de l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par

$$f :]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}; \qquad f(x) = \sin(2x)$$

1. Quelle est l'image de l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ par la fonction f ?
2. Les bornes de f sont-elles atteintes dans $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$?

Exercice 3

Soit θ un réel. On pose, pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_n = \sin n\theta$$

1. La suite $(u_n)_n$ est-elle bornée ? Admet-elle des sous-suites convergentes ? (justifiez votre réponse à l'aide d'un théorème du cours)
2. On suppose, dans cette question, que $\theta = k\pi$ avec k un entier relatif. La suite $(u_n)_n$ converge-t-elle ?
3. On suppose, dans cette question, que $\theta = \frac{\pi}{4}$. Exhiber une sous-suite de $(u_n)_n$ convergeant vers -1 et une sous-suite convergeant vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ?
4. On suppose maintenant que $\lambda = \frac{\theta}{\pi}$ n'est pas un entier relatif, et que $(u_n)_n$ converge vers un réel u.
   (a) En considérant la suite $(\sin(n+2)\theta - \sin n\theta)_n$, démontrer que la suite $(\cos n\theta)_n$ tend vers 0.
   (b) En considérant la suite $(\cos(n+2)\theta - \cos n\theta)_n$, démontrer que la suite $(\sin n\theta)_n$ tend vers 0.
   (c) Déduire de a et b que la suite $(\sin n\theta)_n$ diverge lorsque $\frac{\theta}{\pi}$ n'est pas un entier relatif (on pourra considérer que $\sin^2 n\theta + \cos^2 n\theta = 1$).

Remarque : On rappelle (gratuitement) que, pour tous p et q réels :

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \text{ et } \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2}$$