Corrigé du devoir maison n° 2

EXERCICE 1.

1. Les développements limités classiques donnent :
$$\ln(1+x) - x\sqrt{1-x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) - x\left[1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)\right] = \frac{11}{24}x^3 + x^3\varepsilon(x),$$
$$\sinh(2x) - \sin(2x) = 2x + \frac{8x^3}{6} + x^4\varepsilon(x) - \left[2x - \frac{8x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right] = \frac{8}{3}x^3 + x^4\varepsilon(x).$$
Ce qui donne, après simplification par x^3,
$$\frac{\ln(1+x) - x\sqrt{1-x}}{\sinh(2x) - \sin(2x)} = \frac{11/24 + \varepsilon(x)}{8/3 + \varepsilon(x)},$$
et la limite est donc $11/64$.
2. De même :
$$\begin{aligned} e^{x\sin x} &= 1 + (x\sin x) + \frac{(x\sin x)^2}{2} + (x\sin x)^2\,\varepsilon\,(x\sin x) \\ &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^4}{6} + x^5\varepsilon(x)\right) + \left(\frac{x^2}{2} + x^5\varepsilon(x)\right) + x^4\varepsilon(x) \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x), \end{aligned}$$
d'où
$$\begin{aligned} e^{x\sin x} + \cos x - \frac{x^2}{2} - 2 &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x) + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)\right) - \frac{x^2}{2} - 2 \\ &= \frac{9x^4}{24} + x^4\varepsilon(x). \end{aligned}$$
Par ailleurs,
$$\begin{aligned} \sin\left(x^2\right)(\sin x)^2 &= \left(x^2 + x^5\varepsilon(x)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right)^2 \\ &= x^4 + x^4\varepsilon(x). \end{aligned}$$
Ainsi la limite cherchée est $3/8$.
3. En posant $x = 1+h$, il vient $\dfrac{\ln\left(2x^2-1\right)}{\tan(x-1)} = (\cos h)\dfrac{\ln\left(1+4h+2h^2\right)}{\sin h} = (\cos h)\dfrac{4h + h\varepsilon(h)}{h + h^2\varepsilon(h)}$, et la limite est 4.
4. En posant $u = \frac{1}{u}$, il vient $a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x} = e^{u\ln a} + e^{u\ln b} + e^{u\ln c} = 3 + u(\ln a + \ln b + \ln c) + u\varepsilon(u)$, donc
$$\begin{aligned} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3}\right)^x &= e^{\dfrac{1}{u}\ln\left(1 + u\dfrac{\ln a + \ln b + \ln c}{3} + u\varepsilon(u)\right)} \\ &= e^{\dfrac{\ln a + \ln b + \ln c}{3} + \varepsilon(u)} \\ &= (abc)^{1/3}\, e^{\varepsilon(u)}, \end{aligned}$$
ce qui montre que la limite est $(abc)^{1/3}$.

EXERCICE 2.

1. En effet, $\varphi'(t_0) = 0$ équivaut à $t_0 = \sqrt{A/B}$ et comme φ tends vers $+\infty$ en 0 et en $+\infty$, t_0 est le minimum global de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour $h > 0$, la formule de Taylor-Young est $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c)$ avec $c \in]x, x+h[$. L'hypothèse entraine donc $|f'(x)| \leq \frac{2A}{h} + \frac{h}{2}B = \varphi\left(h/2\right)$.
3. La question 1. montre que $|f'(x)| \leq \varphi\left(\sqrt{A/B}\right) = 2\sqrt{AB}$.

EXERCICE 3.

1. En effet, f étant continue sur un segment, elle y est bornée et atteint ses bornes. Il suffit donc de choisir x de sorte que $f(x)$ soit l'inf de f sur $[a,b]$ et y de sorte que $f(y)$ soit le sup.
2. En effet, la question précédente donne $f(x)\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq f(y)\int_a^b g(t)dt$, et il suffit d'apliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $z \mapsto f(z)\int_a^b g(t)dt$.