Devoir maison n° 2

(à rendre semaine 21)

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x\sqrt{1-x}}{\sinh(2x) - \sin(2x)}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x\sin(x)} + \cos(x) - \dfrac{x^2}{2} - 2}{\sin(x^2)\sin^2(x)}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x$ où $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$

Exercice 2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $A, C \geq 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq A \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, |f''(x)| \leq B$$

1. (Question préliminaire) Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \dfrac{A}{t} + tB \end{array}$$

   admet un minimum global en un point $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ à déterminer.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\forall h > 0, |f'(x)| \leq \frac{2}{h}A + \frac{h}{2}B$$

3. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \sqrt{2AB}$$

Exercice 3. On se donne deux fonctions

- $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue ;
- $g : [a;b] \to \mathbb{R}_+$ continue à valeurs positives.

1. Montrer qu'il existe $x, y \in [a;b]$ tels que :

$$\forall t \in [a;b], f(x) \leq f(t) \leq f(y)$$

2. En déduire qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$$