Devoir maison n° 1 — Corrigé succinct

Exercice 1. 1. S_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1, on peut l'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2}\Big(1-\frac{1}{3^{n+1}}\Big) \end{aligned}$$

Puisque la suite de terme général $\frac{1}{3^{n+1}}$ converge vers 0, les opérations usuelles sur les limites impliquent la convergence de S_n :

$$S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} S'_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{3^k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{3^k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{3^k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3^k} \\ &= \frac{1}{3}\Big(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{3^{k-1}} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3^{k-1}}\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(\sum_{l=0}^{n} \frac{l}{3^l} + \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{3^l}\Big) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$S'_{n+1} = \frac{S'_n + S_n}{3} \tag{1}$$

On remarque tout d'abord que les suites S_n et S'_n sont croissantes. Comme S_n est croissante et convergente, elle est majorée par sa limite, $\frac{3}{2}$.
Montrons par récurrence que S'_n est majorée par 1 :
- **Initialisation :** $S'_0 = 0 < 1$
- **Hérédité :** Supposons la propriété vraie au rang n : $S'_n < 1$. On a donc, en utilisant cette hypothèse de récurrence ainsi que la remarque précédente :

$$S_n + S'_n < \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

  La formule (1) donne alors : $S'_{n+1} < \frac{5}{6} < 1$, ce qu'on voulait.

On vient de montrer que la suite S'_n est majorée, on a également vu qu'elle était croissante, on en déduit qu'elle est convergente.
On note l la limite de S'_n. La formule (1) nous donne alors, après passage à la limite :

$$l = \frac{l + \frac{3}{2}}{3}$$

soit :

$$l = \frac{3}{4}$$

Exercice 2. 1. On va commencer par s'intéresser à $a(\frac{1}{y})$ pour y tendant vers $+\infty$:

$$a(\frac{1}{y}) = \frac{E(y)}{\sqrt{y}}$$

Comme $y - 1 < E(y) \leq y$,

$$\frac{y-1}{\sqrt{y}} < a\left(\frac{1}{y}\right) \leq \frac{y}{\sqrt{y}}.$$

Les fonctions $\dfrac{y-1}{\sqrt{y}} = \sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}}$ et $\dfrac{y}{\sqrt{y}} = \sqrt{y}$ on pour limite $+\infty$ lorsque y tend vers $+\infty$, il en est donc de même pour $a(\frac{1}{y})$ et pour $x = \frac{1}{y} \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} 0^+$ on trouve par composition :

$$a(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

2. On peut écrire $b(x)$ sous la forme suivante : $b(x) = \dfrac{xE\left(\frac{1}{x}\right) + x^2}{xE\left(\frac{1}{x}\right) - x^2}$.

On utilise ensuite la même méthode pour montrer que $xE\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$. Pour $y = \frac{1}{x}$, $y-1 < E(y) \leq y$ nous donne :

$$1 - \frac{1}{y} < \frac{E(y)}{y} \leq 1.$$

Cet encadrement prouve que $\frac{E(y)}{y} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc par composition : $xE\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$.
On a alors directement $xE\left(\frac{1}{x}\right) \pm x^2 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ et donc :

$$b(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1.$$

3. Soit $u(x) = \sqrt{x}$, on a alors $c(x) = u\left(x + \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right) - u(x)$. La fonction u est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, sa dérivée, $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, est décroissante. Ainsi, pour tout $h \in \left[x, x + \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right]$:

$$u'\left(x + \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right) \leq u'(h) \leq u'(x). \tag{2}$$

D'après l'égalité des accroissements finis appliquée à u sur l'intervalle $I = \left[x, x + \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right]$, il existe $a \in I$ tel que :

$$u\left(x + \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right) - u(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot u'(a).$$

On reconnait $c(x)$ à gauche. L'inégalité (2) nous donne également :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot u'(x + \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}) \ &\leq\ c(x)\ \leq\ \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot u'(x) \\
\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}} \ &\leq\ c(x)\ \leq\ \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x}} \\
\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{2\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^4}}}}} \ &\leq\ c(x)\ \leq\ \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{2}
\end{aligned} \tag{3}$$

Les membres de gauche et de droite de l'équation (3) tendent vers $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$, d'où :

$$c(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

4. Nous allons montrer que la fonction d n'admet pas de limite quand x tend vers $+\infty$. Considérons les suites $u_n = n$ et $v_n = n + \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elles tendent toutes les deux vers $+\infty$. On observe que $d(u_n) = 1$ pour tout n. D'autre part,

$$\begin{aligned} d(v_n) &= \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n^n} \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n}}{n^n} \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} \end{aligned} \tag{4}$$

Dans l'inégalité (4), le terme de gauche diverge vers $+\infty$ et le terme de droite est minoré par 1, donc le produit des deux diverge vers $+\infty$.
Ainsi $d(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et $d(v_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui prouve que la fonction d n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Soit $\phi(x) = f(x) - \lambda g(x)$, on a $\phi(0) = -\lambda \leq 0$ et $\phi(1) = 1$.

Comme f et g sont continues, il en est de même pour ϕ et on peut lui appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur $[0,1]$. Puisque $0 \in [f(0), f(1)]$, il existe donc $x \in [0,1]$ tel que :

$$\phi(x) = 0.$$

Ce qui est équivalent à :

$$f(x) = \lambda g(x).$$