Devoir maison n° 1

(à rendre semaine 14)

Exercice 1. Soit n un entier naturel, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} \quad \text{et} \quad S'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}.$$

1. Montrer que la suite (S_n) converge et trouver sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S'_{n+1} = \frac{S_n + S'_n}{3}.$$

   En déduire que la suite (S'_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 2. On désigne par $\mathrm{E}(x)$ la partie entière du réel x.

Les fonctions suivantes admettent-elles une limite au point indiqué ? Si oui, les déterminer. Sinon, expliquer pourquoi.

1. $a(x) = \sqrt{x}\ \mathrm{E}(\frac{1}{x})$ en 0^+.
2. $b(x) = \dfrac{\mathrm{E}(\frac{1}{x}) + x}{\mathrm{E}(\frac{1}{x}) - x}$ en 0^+.
3. $c(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$.
4. $d(x) = \dfrac{x^x}{\mathrm{E}(x)^{\mathrm{E}(x)}}$ en $+\infty$.

Exercice 3. Soient f et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \exists x \in [0,1],\ f(x) = \lambda g(x).$$