Correction du devoir maison n° 1

Exercice 1. 1. (a) La suite $(x_n - l)$ est convergente, donc bornée, d'où l'existence de M.

(b) On a

$$y_n - l = \frac{\sum_{k=1}^n u_k - nl}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n (u_k - l)}{n},$$

d'où en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |y_n - l| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^n (u_k - l)}{n} \right| \\ &\leq \frac{\sum_{k=1}^n |u_k - l|}{n}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(c) Les $N-1$ réels $|x_k - l|$, $k = 1, \ldots, N-1$, sont tous majorés par M. En particulier

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{|x_k - l|}{n} \leq \frac{(N-1)M}{n}. \tag{1}$$

Mais l'entier n étant supèrieur ou égal à $N' \geq \frac{M(N-1)}{\epsilon}$, on a $n \geq \frac{M(N-1)}{\epsilon}$, donc $\epsilon \geq \frac{M(N-1)}{n}$, ce qui avec (1) démontre la première inégalité qui était à prouver. Pour la deuxième, notons que si $k \geq N$ est un entier alors $|x_k - l| \leq \epsilon$, d'où

$$\frac{\sum_{k=N}^n |x_k - l|}{n} \leq \frac{\sum_{k=N}^n \epsilon}{n} = \frac{n-N+1}{n}\epsilon,$$

d'où la seconde inégalité.

(d) Soit $n \geq N'$ un entier. Par la question (b) et celle qui précède, il vient

$$\begin{aligned} |y_n - l| &\leq \frac{\sum_{k=1}^n |x_k - l|}{n} \\ &\leq \frac{\sum_{k=1}^{N-1} |x_k - l|}{n} + \frac{\sum_{k=N}^n |x_k - l|}{n} \\ &\leq \epsilon + \frac{n-N+1}{n}\epsilon \leq 2\epsilon \end{aligned}$$

car $\frac{n-N+1}{n} \leq 1$.

Considérons par la suite (x_n) définie par $x_n = (-1)^n$. C'est une suite divergente. Pourtant, si on note comme dans l'énoncé par y_n sa moyenne des n premiers termes, il est immédiat de vérifier que $|y_n| \leq \frac{1}{n}$: la suite (y_n) est convergente de limite nulle. Ainsi, il se peut que la suite (y_n) soit convergente pour une suite (x_n) divergente : le théorème de Césaro n'admet donc pas de réciproque sans hypothèse supplémentaire sur la suite (x_n).

2. Soit y_{n-1} la moyenne des $n-1$ premiers termes de la suite $(x_{n+1} - x_n)$. On a

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= \frac{\sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} - x_k}{n-1} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} x_k}{n-1} \\ &= \frac{\sum_{k=2}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k}{n-1} \\ &= \frac{x_n - x_1}{n-1}. \end{aligned}$$

La suite $(x_{n+1} - x_n)$ étant convergente de limite l, par le théorème de Césaro la suite (y_n) est convergente de même limite. Or $\left(\frac{x_1}{n-1}\right)$ est convergente de limite nulle. La suite $(\frac{x_n}{n-1})$, et à fortiori $(\frac{x_n}{n})$, est donc convergente de limite l.
La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de $x_n = (-1)^n$.

3. Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente à la suite $(\ln(x_n))$. Là encore, la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de $x_n = e^{(-1)^n}$.

4. Notons $y_n = \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ et $x_n = \frac{(2n)!}{n!n^n}$. Avec ces notations, on a pour tout entier naturel $n \geq 1$, $y_n = x_n^{\frac{1}{n}}$. Un calcul immédiat montre que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

La suite $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ est donc convergente de limite $\frac{4}{e}$. D'après le résultat démontré à la question précédente, la suite (y_n) est donc convergente de limite $\frac{4}{e}$.

Exercice 2. 1. Pour $n = 0$ il n'y a rien à faire. Si $u_n \in \,]0;1[$, alors $1 - u_n \in \,]0;1[$, donc $u_{n+1} = u_n(1-u_n) \in \,]0;1[$, cqfd.

2. Soit $n \geq 0$ entier. On a $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$, d'où la décroissance de cette suite.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée (par zéro). Elle est donc convergente. Soit l sa limite. Comme $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$, en passant à la limite, on obtient $l = l(1-l)$, donc $l = 0$ ou $l = 1$. Mais (u_n) étant décroissante, on a $u_n \leq u_0 < 1$, donc $l \leq u_0 < 1$ et $l \neq 1$. La suite (u_n) est donc bien de limite nulle.

4. Soit $n \geq 0$ un entier. Par définition de (u_n) il vient

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n(1-u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{1-u_n} - \frac{1}{u_n} = v_n.$$

5. Soit y_{n-1} le $(n-1)$-ième terme de la suite de Césaro associée à (v_n). On vérifie que $y_{n-1} = \frac{1}{(n-1)u_n} - \frac{1}{(n-1)u_1}$. Par le théorème de Césaro, la suite (y_n) est convergente de limite 1. Le calcul précédent montre alors que la suite $((n-1)u_n)$, et à fortiori (nu_n) est convergente de limite 1.

Exercice 3. 1. Si la suite (u_n) est convergente de limite l, alors la suite $(u_n + \lambda u_{an})$ converge vers $l(1+\lambda)$. Comme elle converge aussi vers 1, par unicité de la limite, on a $l = \frac{1}{1+\lambda}$.

2. La suite (u_n) ne convergeant pas vers l, il existe donc $\epsilon_0 > 0$ et $(n_k)_k$ une suite d'entiers strictement croissante telle que

$$\forall k \geq 1, |u_{n_k} - l| \geq \epsilon_0. \tag{2}$$

La suite (u_{n_k}) étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente par le théorème de Bolzano-Weierstrass. Il existe donc une extractrice ψ et l' un réel tels que la suite $(u_{n_{\psi(k)}})_k$ converge vers l'. Définissons alors l'extractrice φ par $\varphi(k) = n_{\psi(k)}$. La suite $(u_{\varphi(k)})$ converge vers le réel l', et par (2), on a $|l - l'| \geq \epsilon_0 > 0$, donc $l' \neq l$.

3. Pour $p = 0$, il n'y a rien à faire. Supposons la suite $(u_{a^p\varphi(n)})_n$ convergente. La suite $(u_{a^p\varphi(n)} + \lambda u_{a^{p+1}\varphi(n)})$ étant convergente, et λ étant non nul, il en est donc de même de $(u_{a^{p+1}\varphi(n)})_n$.

4. Pour tout entier naturel $p \geq 0$, la suite $(u_{a^p\varphi(n)} + \lambda u_{a^{p+1}\varphi(n)})$ est convergente de limite 1. Par définition de la suite (x_p) et unicité de la limite, il vient

$$x_p + \lambda x_{p+1} = 1,$$

i.e.

$$x_{p+1} = \frac{1-x_p}{\lambda}. \tag{3}$$

Montrons que la suite $(|x_p|)$ tend vers l'infini avec p. Remarquons que le réel $l = \frac{1}{1+\lambda}$ vérifie $l = \frac{1-l}{\lambda}$. Ainsi, on dispose des égalités

$$\begin{cases} x_{p+1} = \frac{1-x_p}{\lambda}, \\ l = \frac{1-l}{\lambda}. \end{cases} \tag{4}$$

La différence de la première équation par la seconde, et la prise de la valeur absolue donne en particulier

$$|x_{p+1} - l| = \left| \frac{x_p - l}{\lambda} \right|.$$

Une récurrence immmédiate sur p donne

$$|x_p - \lambda| = \frac{|x_0 - l|}{|\lambda|^p}. \tag{5}$$

Comme $|x_0 - l| = |l' - l| \neq 0$ et $\frac{1}{|\lambda|} > 1$, (5) montre que $(|x_p|)$ tend vers l'infini avec p.

Ce dernier fait est contradictoire avec le fait que (u_n) est bornée. En effet, il existe alors un réel M tel que $|u_n| \leq M$ pour tout entier naturel n. En particulier, pour tout entier naturel n et p, il vient $|u_{a^p\varphi(n)}| \leq M$, d'où en faisant tendre n vers l'infini : $|x_p| \leq M$ pour tout p.

L'hypothèse faite après la question (1) est donc fausse : la suite (u_n) est donc convergente de limite l.