Devoir maison n° 1

(à rendre semaine 14)

Exercice 1. 1. Soit (x_n) une suite réelle de limite l. On pose

$$y_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

(a) Expliquer pourquoi il existe un réel M tel que pour tout entier $n \geq 1$ on ait $|x_n - l| \leq M$.
On se fixe $\epsilon > 0$. La suite (x_n) étant convergente de limite l, il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq N$ on ait $|x_n - l| \leq \epsilon$. On pose $N' = Max\left(N, \lfloor \frac{M(N-1)}{\epsilon} \rfloor + 1\right)$.

(b) Montrer que

$$|y_n - l| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k - l|}{n}.$$

(c) Montrer que pour $n \geq N'$, on a

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{|x_k - l|}{n} \leq \epsilon \quad et \quad \sum_{k=N}^{n} \frac{|x_k - l|}{n} \leq \frac{n - N + 1}{n}\epsilon.$$

(d) En déduire que pour $n \geq N'$

$$|y_n - l| \leq 2\epsilon.$$

La suite (y_n) est donc convergente de limite l. Ce résultat est le théorème de Césaro. Que peut-on dire de la réciproque de ce théorème ?

2. Soit (x_n) une suite réelle telle que $(x_{n+1} - x_n)$ converge vers l. En utilisant le théorème de Césaro, montrer que $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ converge également vers l. La réciproque est-elle vraie ?

3. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs tels que $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ converge vers $l > 0$. Montrer que $(x_n^{\frac{1}{n}})$ converge vers l. La réciproque est-elle vraie ?

4. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 \in]0;1[$ et $\forall n \geq 0$ $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 0, u_n \in]0;1[$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que (u_n) converge vers zéro.
4. Soit pour $n \geq 0$ $v_n = \frac{1}{1-u_n}$. Montrer que $\forall n \geq 0$, $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
5. En remarquant que la suite (v_n) converge vers 1 et en appliquant le théorème de Césaro à celle-ci, déduire de la question précédente que (nu_n) converge vers 1.

Exercice 3. Soit $\lambda \neq 0$ un réel tel que $|\lambda| < 1$. Soit a un entier tel que $a \geq 2$. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle bornée telle que la suite $(u_n + \lambda u_{an})$ soit convergente de limite 1.

1. Si la suite (u_n) est convergente, déterminer sa limite l.

   On suppose désormais que la suite (u_n) ne converge pas vers l.
2. Montrer qu'il existe $l' \neq l$ et φ une extractrice telle que $(u_{\varphi(n)})$ ait pour limite l'.
3. Soit $p \geq 0$ un entier. Montrer par récurrence sur p que la suite $(u_{a^p\varphi(n)})$ est convergente.

   On note x_p la limite de la suite $(u_{a^p\varphi(n)})$.
4. Exprimer le terme x_{p+1} en fonction de x_p. En déduire que $\lim_{p\infty} |x_p| = +\infty$. Conclusion ?