Université Bordeaux 1 Année 2008-2009

MHT 204

Corrigé du devoir maison n° 1

Corrigé de l'exercice 1

1. Nous avons

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4}\left(\frac{u_n^2 + a}{u_n}\right)^2 - a \\
&= \frac{1}{4u_n^2}(u_n^4 - 2au_n^2 + a^2) \\
&= \frac{1}{4}\frac{(u_n^2 - a)^2}{u_n^2}
\end{aligned}$$

2. Il est clair que pour $n \geq 0$ on a $u_n \geq 0$. D'après l'égalité précédente nous avons, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1}^2 - a \geq 0$. Comme u_{n+1} est positif on en déduit que $u_{n+1} \geq \sqrt{a}$.

   Soit $n \geq 1$. Calculons le quotient de u_{n+1} par u_n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{u_n^2}\right)$ or $\frac{a}{u_n^2} \leq 1$ car $u_n \geq \sqrt{a}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ et donc $u_{n+1} \leq u_n$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc elle converge vers une limite $\ell > 0$. D'après la relation
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$
   quand $n \to +\infty$ alors $u_n \to \ell$ et $u_{n+1} \to \ell$. À la limite nous obtenons la relation
$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$$
   dont la seule solution positive est $\ell = \sqrt{a}$. Par conséquent (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. La relation
$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$$
   s'écrit aussi
$$(u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a}) = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2(u_n + \sqrt{a})^2}{4u_n^2}.$$
   Donc
$$\begin{aligned}
u_{n+1} - \sqrt{a} &= (u_n - \sqrt{a})^2\frac{(u_n + \sqrt{a})^2}{4u_n^2(u_{n+1} + \sqrt{a})} = (u_n - \sqrt{a})^2\frac{(u_n + \sqrt{a})^2}{4u_n^2(\frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} + \sqrt{a})} \\
&= (u_n - \sqrt{a})^2\frac{(u_n + \sqrt{a})^2}{2u_n(u_n^2 + a + 2u_n\sqrt{a})} = (u_n - \sqrt{a})^2\frac{1}{2u_n} \\
&\leq (u_n - \sqrt{a})^2\frac{1}{2\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

5. Par récurrence : pour $n = 1$, $u_1 - \sqrt{a} \leq 1$. Si la proposition est vraie au rang n, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2 \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 \\ &\leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

6. Soit $u_0 = 3$, alors $u_1 = \frac{1}{2}(3 + \frac{10}{3}) = 3,166\ldots$. Comme $3 \leq \sqrt{10} \leq u_1$ donc $u_1 - \sqrt{10} \leq 0.166\ldots$. Nous pouvons choisir $k = 0,17$. Pour que l'erreur $u_n - \sqrt{a}$ soit inférieure à 10^{-8} il suffit de calculer le terme u_4 car alors l'erreur (calculée par la formule de la question précédente) est inférieure à $1,53 \times 10^{-10}$. Nous obtenons $u_4 = 3,16227766\ldots$

Corrigé de l'exercice 2

Soit $x \in I$, alors $f(x)^2 = 1$ donc $f(x) = \pm 1$. En utilisant la continuité, nous allons montrer que f est constante égale à -1 ou 1. Suposons que f ne soit pas constante, alors il existe deux réels x et y dans I tels que $f(x) = 1$ et $f(y) = -1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z compris entre x et y tel que $f(z) = 0$, ce qui est absurde puisque $f(z)^2 = 1$. D'où le résultat.

Corrigé de l'exercice 3

1. On prolonge f par continuité en posant $f(0) = 0$. Le taux d'accroissement de f à droite en 0 est
$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$
qui tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0. Donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

2. On prolonge g par continuité en posant $g(0) = 0$. En vertu de la règle de l'Hospital, nous avons
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^{3/2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} = +\infty$$
c'est-à-dire que le taux d'accroissement de g à droite en 0 tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0. Par conséquent g n'est pas dérivable à droite en 0.