Université Bordeaux 1 Année 2008-2009

MHT 204

Devoir maison n° 1

(à rendre semaine 12)

Exercice 1 (Méthode de Héron)

Soit $a > 0$ un réel. On choisit un réel $u_0 > 0$ et on définit une suite (u_n) par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On se propose de montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

1. Montrer que
$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$
2. Montrer que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
4. En utilisant la relation $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.
5. On suppose que $u_1 - \sqrt{a} \leq k$. Montrer que l'on a, pour tout $n \geq 1$,
$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$
6. Application : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.

Exercice 2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x)^2 = 1.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 3

Prolonger par continuité en 0 et étudier la dérivabilité à droite en 0 des fonctions

1. $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.
2. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$.