Université Bordeaux 1 Année universitaire 2007-2008
MHT204 (Analyse 1 pour informaticiens)

Corrigé du devoir maison n° 1

Exercice 1

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. On peut écrire
$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$$
Un carré étant toujours positif ou nul, nous avons donc
$$0 \leq a + b - 2\sqrt{ab}$$
d'où
$$2\sqrt{ab} \leq a + b$$
d'où le résultat en divisant par 2.

2. On suppose que $0 \leq a \leq b$. En aditionnant a aux deux membres de l'inégalité $a \leq b$, on obtient
$$2a \leq b + a$$
et d'autre part, en aditionnant b à la même inégalité, on trouve
$$a + b \leq 2b$$
c'est-à-dire, en regroupant les termes
$$2a \leq a + b \leq 2b$$
d'où (en divisant par 2) la première inégalité que l'on cherchait à établir. La deuxième inégalité s'obtient par une stratégie analogue : en multipliant par a (qui est positif) les deux membres de l'inégalité $a \leq b$, on obtient
$$a^2 \leq ba$$
et d'autre part, en multipliant par b la même inégalité, on trouve
$$ab \leq b^2$$
c'est-à-dire, en regroupant les termes
$$a^2 \leq ab \leq b^2$$
d'où, en prenant les racines carrées, la seconde inégalité cherchée. En effet, les réels a et b étant positifs, on a bien $\sqrt{a^2} = a$ et $\sqrt{b^2} = b$.

3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
   (a) Tout d'abord, on remarque que les suites u_n et v_n sont à termes positifs (ceci se montre aisément par récurrence). Montrons que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \leq v_0$. Supposons $n \geq 1$, alors on peut écrire
$$u_n = \sqrt{u_{n-1} v_{n-1}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}$$
   d'où $u_n \leq v_n$ en posant $a = u_{n-1}$ et $b = v_{n-1}$ dans l'inégalité de la question 1 (ce qui est licite, les réels u_{n-1} et v_{n-1} étant positifs).

(b) Montrons que (v_n) est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors on sait que $0 \leq u_n \leq v_n$ d'après la question (a). Donc en posant $a = u_n$ et $b = v_n$ dans la première inégalité de la question 2 on trouve que

$$u_n \leq \frac{u_n + v_n}{2} \leq v_n$$

et la partie de droite s'écrit $v_{n+1} \leq v_n$, ce qu'on voulait.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on sait que $0 \leq u_n \leq v_n$. En posant $a = u_n$ et $b = v_n$ dans la deuxième inégalité de la question 2 on trouve que

$$u_n \leq \sqrt{u_n v_n} \leq v_n$$

et la partie de gauche s'écrit $u_n \leq u_{n+1}$, ce qui montre que u_n est croissante. Finalement nous avons, pour tout entier n, l'inégalité

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

La suite u_n est croissante, majorée par v_0, donc elle converge vers une certaine limite ℓ. De même, la suite v_n est décroissante, minorée par u_0, donc elle converge vers une certaine limite ℓ'. La relation

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

donne, par passage à la limite, l'égalité

$$\ell' = \frac{\ell + \ell'}{2}$$

d'où l'on déduit aisément que $\ell = \ell'$.

Exercice 2

1. Tout d'abord, remarquons que la fonction g est continue (car obtenue par somme et composition de fonctions continues). On calcule facilement que

$$g(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \quad \text{et} \quad g\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Comme $f(a) = f(b)$ on en déduit que

$$g(a) = -g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

donc ou bien $g(a) = 0$ et on a gagné, ou bien $g(a) \neq 0$ et alors g change de signe entre a et $\frac{a+b}{2}$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g étant continue, elle s'annule en au moins un point l'intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$.

2. Soit t le temps (mesuré en heures), on fait commencer le trajet à l'instant $t = 0$. Soit $d(t)$ la distance totale (mesurée en kilomètres) parcourue à l'instant t, nous supposons que la fonction $t \mapsto d(t)$ est continue. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = d(t) - 4t$$

Alors $f(0) = 0$ et par hypothèse $f(1) = 0$. En appliquant la question précédente avec $a = 0$ et $b = 1$, on trouve qu'il existe $t_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(t_0) = 0$, c'est-à-dire $f(t_0 + \frac{1}{2}) = f(t_0)$. Donc

$$d(t_0 + \frac{1}{2}) - d(t_0) = 4(t_0 + \frac{1}{2}) - 4t_0 = 2$$

ce qui signifie que la distance parcourue entre l'instant t_0 et l'instant $t_0 + \frac{1}{2}$ est de 2 km.