Université Bordeaux 1 Année universitaire 2007-2008

MHT204 (Analyse 1 pour informaticiens)

Devoir maison n° 1

(à rendre du 11 au 15 février)

Exercice 1

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$, montrer que
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$
2. On suppose que $0 \leq a \leq b$. Montrer les inégalités suivantes :
$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \quad \text{et} \quad a \leq \sqrt{ab} \leq b.$$
3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
   (a) Montrer que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
   (c) Montrer que (u_n) est croissante. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles ont même limite.

Exercice 2

1. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction g définie par
$$g(t) = f\left(t + \frac{b-a}{2}\right) - f(t)$$
s'annule en (au moins) un point de l'intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$.
2. Une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.