Université Bordeaux 1 Année 2010-2011

MHT 204

Feuille d'exercices n° 5 — Intégration

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes (on pourra intégrer par parties).

$$C_1 = \int_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx \ ; \quad C_2 = \int_0^1 \arctan x\,dx \ ;$$
$$C_3 = \int_0^1 (x^2+1)\cos x\,dx \ ; \quad C_4 = \int_1^2 (3x^2+x+1)\ln x\,dx.$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes (on pourra effectuer des changements de variables).

$$D_1 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx \ ; \quad D_2 = \int_0^1 e^x\cos(e^x)\,dx \ ; \quad D_3 = \int_e^3 \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx \ ;$$
$$D_4 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x+1)}\,dx \ ; \quad D_5 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \ ; \quad D_6 = \int_{1/2}^2 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$$

(poser $t = \ln x$ dans D_1, D_3 et D_4 ; poser $x = \sin u$ dans D_5 ; poser $y = 1/x$ dans D_6).

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x\,dx \ ; \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\cos^3 x\,dx \ ; \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^2 x\,dx.$$

Indication : pour le calcul de I_1, on pourra poser $t = \sin x$. Deviner la suite. Que peut-on dire en général ?

Exercice 4

Calculer par linéarisation (formules d'Euler) la valeur des intégrales

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx \quad \text{et} \quad J_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\sin^4 x\,dx.$$

Exercice 5

Calculer les intégales suivantes :

$$K_1 = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx \ ; \quad K_2 = \int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx \ ; \quad K_3 = \int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx \ ;$$
$$K_4 = \int_{-1}^1 (\arccos x)^2\,dx \ ; \quad K_5 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx \ ; \quad K_6 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$$

Exercice 6

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(0) = 0, \quad f(x) = \frac{1}{2^n} \quad \text{si} \quad \frac{1}{2^n} < x \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

1. Déterminer une suite de fonctions en escalier sur $[0,1]$ qui converge uniformément vers la fonction f.
2. Pourquoi f est-elle intégrable ? Calculer la valeur de $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Exercice 7

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

2. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \;; \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4} \;; \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sin(\frac{k\pi}{n}) \;;$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \;; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \;; \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} e^{\frac{k+2n}{n}}.$$

Exercice 8

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\sin(\pi x)}{4} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $[0,1]$.

   (b) Donner l'expression, pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et pour $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, de

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

   (c) Montrer que la fonction F est continue sur $[0,1]$.

   (d) La fonction F est-elle dérivable sur $[0,1]$? Donner, si elle existe, l'expression de la dérivée de F.

2. On note $x \mapsto E(x)$ la fonction partie entière.

   (a) Soit $n \geq 0$ un entier naturel. Quelle est la valeur de $\int_0^n E(t)\,dt$?

   (b) Soit $x \geq 0$ un réel. Quelle est la valeur de $\int_0^x E(t)\,dt$?

   (c) Représenter graphiquement la fonction $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$G(x) = \int_0^x E(t)\,dt.$$

   La fonction G est-elle continue ? Est-elle dérivable ?

Exercice 9
Soient $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f_1(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\, dt \quad \text{et} \quad f_2(x) = \int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2\, dt.$$

Montrer que f_1 et f_2 sont dérivables, et calculer leurs dérivées.

Exercice 10

1. Soient a un réel strictement positif, et f une fonction continue sur $[-a, a]$.
   (a) Montrer que si la fonction f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.
   (b) Montrer que si la fonction f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$.
2. Soient $a > 0$ et f une fonction continue sur $[0, a]$. Montrer que

$$\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a - x)\, dx.$$

   En déduire la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx.$$

3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T. Montrer que l'on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'égalité

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)\, dx.$$

Exercice 11
Soit $f : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer

$$I = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx + \int_a^b f^{-1}(x)\, dx.$$

Exercice 12
On considère la fonction f définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt.$$

1. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f' a une limite quand $x \to 0^+$ et quand $x \to 1$.
3. Déterminer

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

4. Soit g définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par

$$g(t) = \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t\ln t}.$$

Déterminer

$$\lim_{t\to 1} g(t) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} g(t)\,dt$$

et en déduire $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Exercice 13

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$$

Exercice 14

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$u_n = \int_0^1 t^{2n-2}(t-1)^2\,dt.$$

2. Montrer l'égalité

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{1-t}{1+t}(1-t^{2N})\,dt$$

3. Calculer, si elle existe

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n$$