Université Bordeaux 1 Année 2010-2011
MHT 204

Feuille d'exercices n° 4 — Formules de Taylor

Exercice 1
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I.

1. Donner l'expression du polynôme de Taylor de f à l'ordre n en un point $x_0 \in I$.
2. Rappeler l'énoncé des formules de Taylor-Young et Taylor-Lagrange pour la fonction f au point x_0, en indiquant soigneusement les hypothèses.

Exercice 2
Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto e^x$ au voisinage de 0.
2. $x \mapsto \ln x$ au voisinage de 1. En déduire $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-h}{h^2}$.
3. $x \mapsto \sin x$ au voisinage de 0. En déduire $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$.
4. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ au voisinage de 0.
5. $x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$ au voisinage de 2.

Exercice 3
Appliquer Taylor-Lagrange pour calculer la valeur approchée de $\sqrt{e}$ à 10^{-4} près.

Exercice 4

1. Etablir les inégalités

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^x$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x$$

2. Soit x un réel fixé. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange pour démontrer que la suite $u_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge vers e^x.

Exercice 5
Donner les développements des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \sin(x^2) + \cos x$ à l'ordre 6 au voisinage de 0.
2. $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0. On prolonge g à $\mathbb{R}$ tout entier en posant $g(0) = e$. Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.
3. $h(x) = e^{\sin x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

4. $i(x) = (\cos x - 1)(\sinh x - x) - (\cosh x - 1)(\sin x - x)$ à l'ordre 7 au voisinage de 0. En déduire la valeur $i^{(7)}(0)$.
5. $j(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x+2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
6. $k(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 1. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative au point $(1, 0)$ et déterminer la position de la courbe par rapport à la tangente.
7. $l(x) = (\frac{\sin x}{x})^2$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.
8. $r(x) = (1 - 2x^2)e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.
9. $s(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
10. $t(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2x+1}$ à l'ordre n au voisinage de 0.

Exercice 6
Soit $n \geq 1$ un entier naturel. En utilisant une formule de Taylor, montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

Exercice 7
1. Trouver un équivalent polynômial au voisinage de $x = 1$ et de $x = 0$ respectivement des fonctions
$$f(x) = 2^{x-1} - x^{\ln 2} \ , \quad g(x) = \cos x \cosh x - 1.$$
2. Déterminer deux réels a et b tels que
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x}{\ln(1 + x)} + \frac{a}{x} + b \right) = 0 \ ,$$
et donner un équivalent de l'expression trouvée quand $x \to 0$.
3. Donner le développement asymptotique à deux termes de la suite
$$u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}.$$
En déduire $\lim_{n \to \infty} nu_n$.

Exercice 8
Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{x} - \sqrt{\ln(1 + x)}$$

est dérivable à droite en 0, et donner la valeur de sa dérivée.

Exercice 9
Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \to 0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}) \ , \quad \lim_{x \to 1} (\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\ln x}) \ ,$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\cot x} \ , \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \ln(1 + x^2)}{x \tan x} \ ,$$
$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} \ , \quad \lim_{x \to 0} |\sin x|^{\tan x} \ , \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} |\tan x|^{\cos x}.$$